

13. Delyavskyy M., Rosiński K. The New Approach to Analysis of Thin Isotropic Symmetrical Plates // Appl. Sci. – 2020. – 10(17). – P. 5931. DOI: 10.3390/app10175931
14. Bhaskar D.P., Thakur A.G., Sayyad I.I., Bhaskar S.V. Numerical Analysis of Thick Isotropic and Transversely Isotropic Plates in Bending using FE Based New Inverse Shear Deformation Theory // International Journal of Automotive and Mechanical Engineering. – 2021. – 18(3). – P. 8882-8894. DOI: 10.15282/ijame.18.3.2021.04.0681
15. Videla J., Natarajan S., Bordas S.P.A. A new locking-free polygonal plate element for thin and thick plates based on Reissner-Mindlin plate theory and assumed shear strain fields // Computers & Structures. – 2019. – 220. – P. 32–42. DOI: 10.1016/j.compstruc.2019.04.009

СӘУЛЕТ ЖӘНЕ ҚҰРЫЛЫС  
АРХИТЕКТУРА И СТРОИТЕЛЬСТВО  
ARCHITECTURE AND CONSTRUCTION

DOI 10.51885/1561-4212\_2024\_2\_249  
MPHTI 67.11.29

**М.Ж. Досжанов<sup>1</sup>, К. Байтасов<sup>2</sup>, М.А. Ембергенов<sup>3</sup>, Ф.Ж. Тасболат<sup>4</sup>**

Кызылординский университет «Болашак», г. Кызылорда, Казахстан

<sup>1</sup>E-mail: doszhanov55@mail.ru\*

<sup>2</sup>E-mail: kbaitasov@mail.ru

<sup>3</sup>E-mail: ema-2802@mail.ru

<sup>4</sup>E-mail: galymzhan\_zh@mail.ru

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ  
СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНКИ КАК ПЛОСКОГО ЭЛЕМЕНТА,  
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ**

**ПЛАСТИНАНЫҢ ӨЗ ТЕРБЕЛІСТЕРІНІҢ ЕСЕПТЕРІН ҚОРШАҒАН ОРТАМЕН  
ӘРЕКЕТТЕСЕТІН ЖАЗЫҚ ЭЛЕМЕНТ РЕТІНДЕ ТЕОРИЯЛЫҚ ЗЕРТТЕУ**

**THEORETICAL STUDIES OF THE PROBLEMS OF NATURAL VIBRATIONS  
OF A PLATE AS A PLANE ELEMENT INTERACTING WITH THE ENVIRONMENT**

**Аннотация:** актуальной проблемой теоретических исследований в области нестационарных колебаний упругих и вязкоупругих тел является развитие строго математического подхода к исследованию двумерных и пространственных задач. Основная цель исследования нестационарного поведения различных элементов конструкций и сооружений в этой работе сводится к строгой и обоснованной постановке краевых задач колебания и волновых процессов в деформируемых средах. На основе метода, развиваемого в работах И.Г. Филиппова, статья посвящена математической постановке краевых задач колебания элементов конструкций и сооружений. Разработана методика расчета частот собственных колебаний плоских элементов в различных условиях их закрепления. Решены практически важные задачи в области строительной практики. Создание новых технологий строительства и использование качественно новых материалов выдвигают повышенные требования динамического поведения деформируемых сред. Полученные теоретические и прикладные результаты позволяют решать широкий класс практических задач колебания элементов конструкций и сооружений, подтверждаются строгой математической постановкой проблем, проверкой и сопоставлением с классическими теориями колебаний и другими теориями последних лет.

**Ключевые слова:** упругие и вязкоупругие тела; колебания; элемент; конструкция; сооружения; пластинки; основания; инерционность; деформируемость.

**Аңдатпа:** серпімді және тұтқыр серпімді денелердің стационарлы емес тербелістері саласындағы теориялық зерттеулердің өзекті мәселесі екі өлшемді және кеңістіктік есептерді зерттеудің қатаң математикалық тәсілін жасау болып табылады. Бұл жұмыста құрылымдар мен құрылымдардың өртүрлі элементтерінің стационарлы емес мінез-құлқын зерттеудің негізгі мақсаты деформацияланатын орталардағы тербелістердің және толқындық процестердің

шекаралық есептерін қатаң және негізделген тұжырымдау болып табылады. еңбектерінде жасалған әдіс негізінде И.Г. Филиппов, мақала құрылымдар мен құрылымдардың элементтерінің тербелістерінің шектік есептерін математикалық тұжырымдауға арналған. Тегіс элементтердің әр түрлі бекіту жағдайларындағы табиғи тербелістерінің жиілігін есептеу әдістемесі әзірленді. Құрылыс тәжірибесі саласындағы іс жүзінде маңызды міндеттер шешілді. Құрылыстың жаңа технологияларын жасау, сапалы жаңа материалдарды қолдану деформацияланатын орталардың динамикалық әрекетіне жоғары талаптар қояды. Алынған теориялық және қолданбалы нәтижелер конструкциялар мен құрылымдардың элементтерінің тербелістерінің практикалық есептерінің кең класын шешуге мүмкіндік береді және есептерді қатаң математикалық тұжырымдаумен, тербелістердің классикалық теорияларымен және соңғы жылдардағы басқа теориялармен салыстырумен және тексерумен расталады.

**Түйін сөздер:** серпімді және тұтқыр серпімді денелер; ауытқулар; элемент; дизайн; құрылымдар; жазбалар; негіздер; инерция; деформациялану.

**Abstract:** an urgent problem of theoretical research in the field of non-stationary oscillations of elastic and viscoelastic bodies is the development of a strictly mathematical approach to the study of two-dimensional and spatial problems. The main goal of studying the non-stationary behavior of various elements of structures and structures in this work is reduced to a rigorous and justified formulation of the boundary value problems of vibrations and wave processes in deformable media. Based on the method developed in the works of I.G. Filippov, the article is devoted to the mathematical formulation of boundary value problems of vibrations of elements of structures and structures. A technique has been developed for calculating the frequencies of natural vibrations of flat elements under various conditions of their fixing. Practically important tasks in the field of construction practice have been solved. The creation of new construction technologies, the use of qualitatively new materials puts forward increased requirements for the dynamic behavior of deformable media. The obtained theoretical and applied results make it possible to solve a wide class of practical problems of oscillations of elements of structures and structures, and is confirmed by a rigorous mathematical formulation of problems, verification and comparison with classical theories of oscillations and other theories of recent years.

**Keywords:** elastic and viscoelastic bodies; fluctuations; element; design; structures; records; grounds; inertia; deformability.

*Введение.* Огромный размах промышленного и жилищного строительства приводит к необходимости дальнейшего развития и усовершенствования методов расчета в строительной науке и практике. Конкретные инженерные задачи и законы внутреннего развития фундаментальных исследований в области современного строительства выявили тенденции к последовательному, возможно более полному, учету физико-механических свойств элементов строительных материалов. При решении прикладных задач колебания прямоугольных плоских элементов строительных конструкций, взаимодействующих с окружающей средой, возникает широкий класс задач колебаний, связанных с различными граничными условиями на краях плоского элемента и начальными условиями. Исследование колебаний прямоугольного плоского элемента с учетом усложняющих факторов сводится к решению достаточно сложных задач. Трудность решения данных задач обусловлена как типом приближенных уравнений колебаний, так и разнообразием граничных условий по краям ограниченного плоского элемента. В настоящей работе исследуются собственные колебания прямоугольного плоского элемента с учетом окружающей среды или основания при различных видах граничных условий [1, 2, 3].

*Литературный обзор.* В объеме настоящего введения и обзора литературы не представляется возможным осветить даже то наиболее важное и ценное, что достигнуто исследованиями в решении рассматриваемой проблемы. Это объясняется тем, что содержание работ в области строительных конструкций, лежащих на деформируемом основании, определяется не только принятой моделью основания, но и типом конструкции, и тем, какая задача рассматривается: статическая или динамическая, линейная или нелинейная, и т.д. В настоящее время имеются достаточно полные обзоры работ, представляющих большой

прикладной интерес по расчету конструкций на деформируемом основании. Фундаментальные идеи и подходы в развитии математических моделей, теоретические и экспериментальные исследования в области динамики конструкций и сооружений связаны с именами таких ученых, как Ж.Д. Ахенбах, В.З. Власов, Э.И. Гриколюк, А.А. Илюшин, Г. Кольский, Н.Н. Леонтьев, В.В. Новожилов, Г.И. Петрашень, Г.И. Пшеничников, Ю.М. Работнов, Х.А. Рахматуллин, С.П. Тимошенко, И.Г. Филиппов и многих других [2, 4, 5].

Из моделей упругого основания следует отметить наиболее старую и простую модель, называемую винклеровским упругим основанием. В математическом отношении модель Винклера является наиболее простой, так как приводит к интегрированию сравнительно простых дифференциальных уравнений, вследствие чего получила наибольшее развитие.

И.Г. Филипповым [2,3,5,7,8] решены задачи по неустановившемуся движению водонасыщенных сжимаемых грунтов, исследовано влияние многокомпонентности на распространение сейсмических волн, предложен приближенный метод решения динамических задач для линейных вязкоупругих сред.

*Материалы и методы исследования.*

1. Собственные колебания прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по краям.

Собственные колебания плоского элемента, лежащего на деформируемом основании, так и находящегося под поверхностью слоя, относятся к уравнениям гиперболического типа, т.е. к решению однородного уравнения [5, 6, 13, 14]

$$A_1 \left( \frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial t^2} \right) + A_2 \left( \frac{\partial^3 W_1^{(1)}}{\partial t^4} \right) + A_3 \left( \frac{\partial^3 W_1^{(1)}}{\partial t^2} \right) + A_4 (\Delta^2 W_1^{(1)}) + P_1(W_1^{(1)}) = 0, \quad (1)$$

где операторы  $A_j, P$  зависят от рассматриваемых задач при граничных условиях:

$$\begin{aligned} W_1^{(1)} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 & \quad (x = 0; l_1) \\ W_1^{(1)} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 & \quad (y = 0; l_2) \end{aligned} \quad (2)$$

где  $(l_1, l_2)$  – размеры плоского элемента в плане.

В случае упругого плоского элемента, основания верхнего слоя операторы  $A_j$  являются постоянными величинами.

Например, в случае изотропной упругой пластинки и упругого основания постоянные  $A_1, A_2, A_3, A_4$  и оператор  $P_1$  будут равны:

$$\begin{aligned} A_1 = 1, \quad A_2 = \frac{h^2(7-8\nu)}{12b^2(1-\nu)}; \\ A_3 = \frac{2h^2(2-\nu)}{3(1-\nu)}; \quad A_4 = \frac{2h^2b^2}{2(1-\nu)}; \\ P_1(W_1^{(1)}) = \frac{s}{2h} \rho b^4 \left\{ \frac{\partial W}{\partial t} + h^2 \left[ \frac{1}{b^2} \left( \frac{5-8\nu}{2(1-\nu)} \right) \frac{\partial^3 W}{\partial t^3} - 4\Delta \frac{\partial W}{\partial t} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (3)$$

Для простоты рассмотрим случай упругого плоского элемента, основания и верхнего слоя. В этом случае величины  $A_j$  являются постоянными. Решение сформулированной задачи будем искать в виде

$$W_1 = \exp\left(\frac{b_1}{h} \xi t\right) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} W_{n,m} \sin\left(\frac{\pi n x}{l_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi m y}{l_2}\right); \quad (4)$$

где  $\xi$  – безразмерная комплексная частота.

Подставляя выражение (4) в уравнение колебания (1), для безразмерной комплексной частоты  $\xi$  получаем алгебраическое уравнение:

$$\begin{aligned} & A_2 \frac{b_1^4}{h^4} \xi^4 + \left\{ A_1 \frac{b_1^2}{h^2} + A_3 \frac{b_1^2}{h^2} \left[ \left(\frac{\pi n}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2 \right] \right\} \xi^2 + \\ & + A_4 \left[ \left(\frac{\pi n}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2 \right]^2 + P_1^{(0)}(\xi) = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

где  $P_1^{(0)}(\xi)$  равно

$$\begin{aligned} P_1^{(0)}(\xi) = & \frac{S}{2h} \rho b_1^4 \left\{ \frac{b_1}{h} \xi + h^2 \left[ \left(\frac{5-8\nu}{2(1-\nu)}\right) \frac{b_1}{h^3} \xi \right] + \right. \\ & \left. + 4 \left[ \left(\frac{\pi n}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2 \right] \frac{b_1}{h} \xi \right\}; \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогично выводится частотное уравнение для вязкоупругой пластинки.

В частности, для вязкоупругой пластинки, удовлетворяющей модели Максвелла, в уравнении (1) необходимо производные [7, 8, 13, 14, 15]

$$\frac{\partial^4 W}{\partial t^4}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial W}{\partial t};$$

заменить на производные

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} + \frac{2}{\tau} \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial t^3} + \frac{1}{\tau^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}; \\ & \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\partial W}{\partial t}; \\ & \frac{\partial W_1}{\partial t} + \frac{1}{\tau} W; \end{aligned}$$

где  $\tau$  – время релаксации.

Частотные уравнения (5) удобнее представить в виде

$$\xi^4 + A_0 \xi^3 + B_0 \xi^2 + C_0 \xi + D_0 = 0; \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 = & \frac{3S_0(5-8\nu)}{2(7-8\nu)}; \quad B_0 = \frac{4(1-\nu)}{(7-8\nu)} \left[ 3 + 2\pi^2 \left(\frac{2-\nu}{1-\nu}\right) \gamma \right]; \\ C_0 = & \frac{6S_0(1-\nu)}{(7-8\nu)} (1 - \pi^2 \gamma); \quad D_0 = \frac{8\pi^4}{(7-8\nu)} \gamma^2; \\ \gamma = & \left(\frac{hn}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{hm}{l_2}\right)^2; \end{aligned} \quad (8)$$

$\nu$  – коэффициент Пуассона пластинки, а  $\gamma$  учитывает как геометрические размеры пластинки, так и номера гармоник колебательного процесса.

Исходя из теоремы Гурвица [1,2,3,14,15] и положительности коэффициентов (8), следует, что действительные части комплексных корней алгебраического уравнения отрицательны, что отвечает затухающему характеру колебания пластинки за счет инерционности и деформируемости основания, причем параметр  $S_0$  характеризует или может характеризовать одно или двухкомпонентное упругое основание.

В отличие от основания Винклера, у которого алгебраическое уравнение для частоты  $\xi$  является биквадратным и имеет только чисто мнимые корни (отсутствия затухания), уравнение (7) более соответствует физике явления, так как, во-первых, получено без привлечения каких-либо гипотез, во-вторых, описывает отток энергии от пластинки к основанию, колебания которого возбуждаются колеблющейся пластинкой [9,10,11,12]. Алгебраическое уравнение (7) решалось численно на ЭВМ.

В табл. 1 приведены данные расчета при значении параметров  $\nu$  и  $S_0$  равных

$$\nu = 0,2; S_0 = 0,3; S_0 = 0,5.$$

Таблица 1. Данные расчета

$\nu$	$S_0$	$\gamma$	$\text{Re } \xi_{10}$	$\text{Re } \xi_{20}$	$\text{Im } \xi_{10}$	$\text{Im } \xi_{20}$
0,2	0,3	1	-0,0337	-0,108	2,602	4,615
		2	-0,0245	-0,117	5,473	8,779
		3	-0,0220	-0,119	8,297	13,030
		4	-0,0211	-0,120	11,110	17,110
		5	-0,0206	-0,121	13,910	21,590
		6	-0,0204	-0,121	16,710	25,890
		7	-0,0202	-0,121	19,500	30,180
		8	-0,0201	-0,121	22,300	34,480
		9	-0,0200	-0,122	25,090	38,780
		10	-0,0200	-0,122	27,602	43,080
0,2	0,5	1	-0,056	-0,180	2,602	4,609
		2	-0,041	-0,195	5,474	8,776
		3	-0,037	-0,199	8,298	13,030
		4	-0,035	-0,201	11,110	17,310
		5	-0,034	-0,202	13,910	21,590
		6	-0,034	-0,202	16,710	25,890
		7	-0,034	-0,202	19,500	30,180
		8	-0,033	-0,203	22,300	34,480
		9	-0,033	-0,203	25,090	38,780
		10	-0,033	-0,203	27,602	43,080

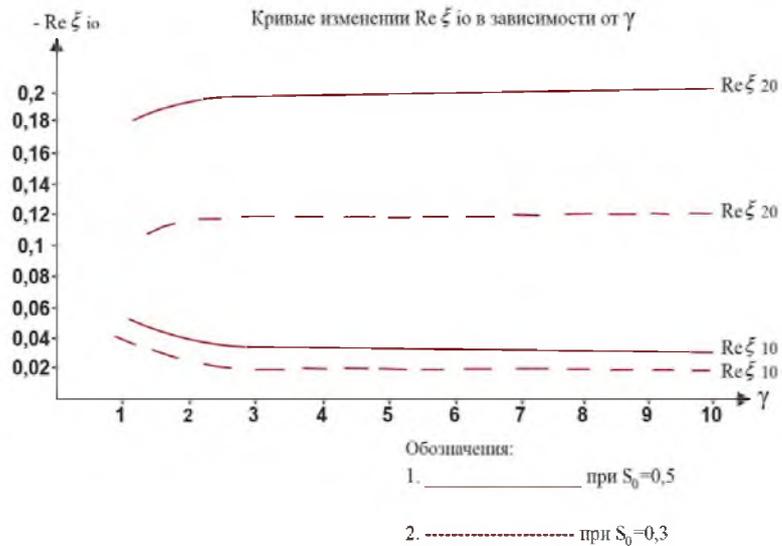
Здесь введены обозначения

$$\xi_{1,2} = \text{Re } \xi_{10} \pm iI_m \xi_{10}; \quad \xi_{1,2} = \text{Re } \xi_{10} \pm iI_m \xi_{10}; \quad (9)$$

при этом  $\text{Re } \xi_{j0}$  – коэффициенты затухания,  $\text{Im } \xi_{j0}$  – частоты собственных колебаний, причем параметр  $\gamma$  принимался в достаточно широком диапазоне:

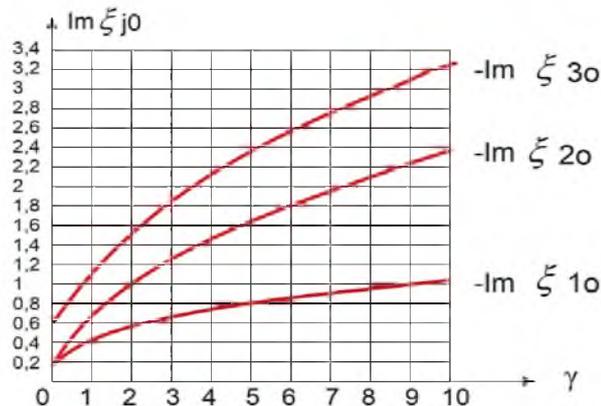
$$0 \leq \gamma \leq 10.$$

На рис. 1 приведены численные результаты зависимости  $\text{Re} \xi_{j0}$  от  $\gamma$ .



**Рисунок 1.** Кривые изменения  $\text{Re} \xi_{j0}$  в зависимости от  $\gamma$

На рис. 2 приведены зависимости мнимых величин  $\text{Im}(\xi)$ , определяющие частоты собственных колебаний от параметра  $\gamma$ .



**Рисунок 2.** Кривые изменения  $\text{Im}(\xi)$ , в зависимости от  $\gamma$

Как видно из рис. 1, 2, коэффициенты затухания зависят от параметров деформируемого основания, а собственные частоты слабо зависят от этих же параметров основания [3, 5, 13, 15].

Как показывают расчеты, аналогичные явления относятся и к пластинке, лежащей под поверхностью деформируемого слоя.

2. Задача о собственных колебаниях двухслойной пластинки, лежащей на деформируемом основании.

Более сложной задачей колебания является задача о собственных колебаниях двухслойной пластинки, лежащей на деформируемом основании. Простейшим

уравнением колебания двухслойной пластинки является уравнение шестого порядка при нулевой правой части, т. е. уравнение [9, 10, 16, 17, 18, 19]

$$\begin{aligned} Q_1 \left( \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} \right) + Q_2 \left( \Delta \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right) + Q_3 (\Delta^2 W) + Q_4 \left( \frac{\partial^6 W}{\partial t^6} \right) + \\ + Q_5 \left( \Delta \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} \right) + Q_6 \left( \Delta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right) + Q_7 (\Delta^3 W) + P(W) = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

где  $P(W)$  – закон отпора и для упругой пластинки и упругого основания. Величины  $Q_j$  являются постоянными и равны

$$\begin{aligned} Q_1 &= M_1^{-1} (h_0 \rho_0 + h_1 \rho_1); \\ Q_2 &= -(h_0 P_2 + h_1); \end{aligned} \quad (11)$$

$$Q_3 = \frac{1}{6} M_1^{-1} \left[ h_0^2 (h_0 \rho_0 + 3h_1 \rho_1) \rho_0 M_0^{-1} + h_1^2 (h_1 \rho_1 + 3h_0 \rho_0) \rho_1 M_1^{-1} \right]$$

$$\begin{aligned} Q_4 &= -\frac{4}{6} h_0^2 \left\{ 2P_2 h_0 \rho_0 M_0^{-1} + 3h_1 (\rho_0 M_0^{-1} + \rho_1 M_1^{-1}) \right\} + \\ &+ h_1^2 \left\{ 2h_1 \rho_1 M_1^{-1} + 3P_2 h_0 (\rho_0 M_0^{-1} + \rho_1 M_1^{-1}) \right\} \end{aligned}$$

$$Q_5 = \frac{1}{6} \left[ h_0^2 (P_2 h_0 + 3h_1) + h_1^2 (h_1 + 3P_2 h_0) \right]$$

$$\begin{aligned} Q_6 &= \frac{1}{120} \left\{ h_0^5 P_2 \rho_0^2 M_0^{-2} (10 \rho_1 M_1^{-1} + \rho_0 M_0^{-1}) + h_1^5 \rho_1 M_1^{-2} (10 \rho_0 M_0^{-1}) + \right. \\ &+ 5h_0 h_1 \rho_0 \rho_1 M_0^{-1} M_1^{-1} \left[ h_0^3 \rho_0 M_0^{-1} (3 - 3D_0 - D_0^2) - h_1^3 P_2 \rho_1 M_1^{-1} (3 - 3D_1 - D_1^2) \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_7 &= \frac{1}{120} \left\{ -13 (h_0^5 P_5 \rho_0^2 M_0^{-2} + h_1^5 \rho_1^2 M_1^{-2}) + 20 (h_0^5 P_2 + h_1^5) \rho_0 \rho_1 M_0^{-1} M_1^{-1} - \right. \\ &- 5h_0 h_1 \left[ h_0^3 \rho_0 M_0^{-1} ((3 - 3D_0 - D_0^2) \rho_0 M_0^{-1} - (D_0 - 4) \rho_1 M_1^{-1}) + \right. \\ &+ \left. h_1^3 P_2 \rho_1 M_1^{-1} ((3 - 3D_1 - D_1^2) \rho_1 M_1^{-1} - (D_1 - 4) \rho_0 M_0^{-1}) \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

Для шарнирно опертой двухслойной пластинки для поперечного смещения  $W$  для решения уравнения (10) имеем граничные условия

$$\begin{aligned} W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = 0; \quad (x = 0, l_1) \\ W = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0; \quad (y = 0, l_2) \end{aligned} \quad (12)$$

Решение уравнения (10) также будем искать в виде

$$W = \exp \left( \frac{b_1}{h} \xi t \right) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} W_{n,m} \sin \left( \frac{\pi n x}{l_1} \right) \sin \left( \frac{\pi m y}{l_2} \right); \quad (13)$$

при этом граничные условия (11) удовлетворяются автоматически.

Подставляя решение (13) в уравнение (10) для частоты  $\xi$  получаем уравнение шестого порядка предыдущего пункта. В силу громоздкости уравнения оно не проводится.

Введем безразмерные переменные:

$$h = \frac{h_1}{h_0}; \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_0}; \quad P_2 = \frac{\mu_0}{\mu_1}; \quad b = \frac{b_1}{b_0};$$

$$D_0 = \frac{1}{2(1-\nu_0)}; \quad D_1 = \frac{1}{2(1-\nu_1)}; \quad (14)$$

где:  $\nu_0, \nu_1$  – коэффициент Пуассона материала слоев;

$b_0, b_1$  – скорости распространения поперечных волн в материале слоев пластинки;

$h_0, h_1$  – соответствующие толщины составляющих двухслойных пластинки.

**Таблица 2.** Результаты расчетов

$h$	$\rho$	$\nu_0$	$\nu_1$	$\gamma$	$\text{Re } \xi_{j0}$	$\text{Im } \xi_{j0}$
0,5	5,57	0,2	0,32	0	0,000	0,000
					0,000	0,000
					0,000	0,000
					0,100	0,000
					0,041	0,558
0,5	5,57	0,2	0,32	1	0,099	0,000
					0,117	0,000
					0,006	0,504
					0,017	0,686
					0,011	1,150
0,5	5,57	0,2	0,32	2	0,100	0,000
					0,116	0,000
					0,015	0,586
					0,013	1,030
					0,006	1,540
0,5	5,57	0,2	0,32	3	0,100	0,000
					0,115	0,000
					0,017	0,661
					0,012	1,280
					0,004	1,860
0,5	5,57	0,2	0,32	4	0,100	0,000
					0,115	0,000
					0,018	0,729
					0,012	1,490
					0,003	2,120
0,5	5,57	0,2	0,32	5	0,100	0,000
					0,114	0,000
					0,019	0,791
					0,012	1,670
					0,003	2,360

Окончание табл. 2

$h$	$\rho$	$v_0$	$v_1$	$\gamma$	$\text{Re } \xi_{j0}$	$\text{Im } \xi_{j0}$
0,5	5,57	0,2	0,32	6	0,101	0,000
					0,114	0,000
					0,019	0,848
					0,012	1,840
					0,003	2,570
0,5	5,57	0,2	0,32	7	0,101	0,000
					0,114	0,000
					0,020	0,902
					0,012	1,990
					0,002	2,770
0,5	5,57	0,2	0,32	8	0,101	0,000
					0,114	0,000
					0,020	0,953
					0,012	2,130
					0,002	2,960
0,5	5,57	0,2	0,32	9	0,101	0,000
					0,114	0,000
					0,020	0,661
					0,012	1,280
					0,002	1,860
0,5	5,57	0,2	0,32	10	0,101	0,000
					0,113	0,000
					0,020	1,000
					0,012	2,260
					0,002	3,130

На рис. 3 приведены кривые изменения  $I_m \xi_{j0}$  в зависимости от  $\gamma$ .

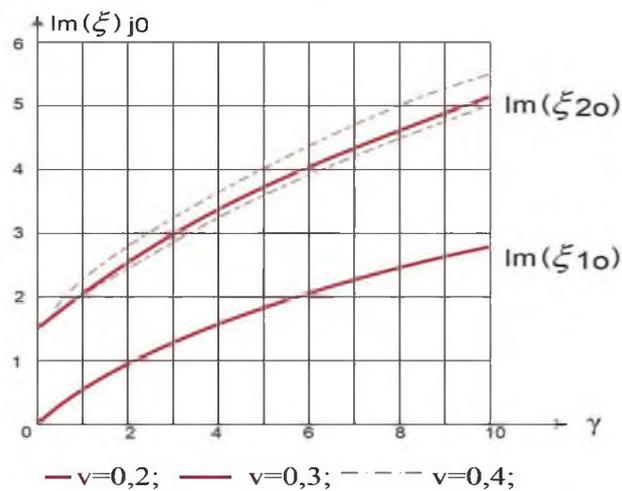


Рисунок 3. Кривые изменения  $I_m \xi_{j0}$  в зависимости от  $\gamma$

3. Собственные колебания прямоугольной пластинки, два противоположных края которой шарнирно оперты.

Более сложной задачей исследования собственных колебаний плоского прямоугольного элемента является, когда два противоположных края пластинки шарнирно оперты, а два других имеют различные виды закрепления или свободны от напряжений [2, 4, 8, 17, 19].

Для простоты рассмотрим пластинку, лежащую на деформируемом основании, т.е. рассмотрим уравнение (1).

Решение уравнения (1), например, шарнирно опертых по краям ( $y=0, l_2$ ) будем искать в виде

$$W_1^{(1)}(x, y, t) = \exp\left(\frac{b}{h} \xi t\right) \sum_{k=1}^{\infty} W_k^{(1)}(x) \sin\left(\frac{k\pi y}{l_2}\right); \quad (15)$$

Подставляя выражения (15) в (1) для определения  $W_k(x)$  получаем уравнение

$$\left\{ A_1 \left( \frac{b^2}{h^2} \xi^2 \right) + A_2 \left( \frac{b^4}{h^4} \xi^4 \right) - A_3 \left( \frac{b^2}{h^2} \xi^2 \right) \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left( \frac{k\pi}{l_2} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + A_4 \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left( \frac{k\pi}{l_2} \right)^2 + P_1^{(1)} \left( \xi, \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \right\} W_k^{(1)} = 0; \quad (16)$$

где  $P_1^{(1)} = \left( \xi, \frac{\partial}{\partial x} \right) W_k^{(1)}$  равен

$$P_1^{(1)} \left( \xi, \frac{\partial}{\partial x} \right) W_k^{(1)} = \frac{S}{2h} \rho b^4 \left\{ \frac{b}{h} + h^2 \left[ \frac{1}{b^2} \left( \frac{5-8\nu}{2(1-\nu)} \right) \frac{b^3}{h^3} + \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left( \frac{k\pi}{l_2} \right)^2 \right) \right] \right\} W_k^{(1)}; \quad (17)$$

Общее уравнение будем искать в виде

$$W_k^{(1)}(x) = C_1 \left[ \frac{\cos(\alpha_0 x)}{\alpha_0^n} + \frac{\cos(\alpha_1 x)}{\alpha_1^n} \right] + C_2 \left[ \frac{\cos(\alpha_0 x)}{\alpha_0^n} - \frac{\cos(\alpha_1 x)}{\alpha_1^n} \right] + \\ + C_3 \left[ \frac{\sin(\alpha_0 x)}{\alpha_0^m} + \frac{\sin(\alpha_1 x)}{\alpha_1^m} \right] + C_4 \left[ \frac{\sin(\alpha_0 x)}{\alpha_0^m} - \frac{\sin(\alpha_1 x)}{\alpha_1^m} \right]; \quad (18)$$

где:  $C_j$  – постоянные интегрирования,

$\alpha_j$  – корни характеристического уравнения дифференциального уравнения (16).

Целые числа ( $n, m$ ) выбираются из условия упрощения задачи при удовлетворении граничных условий при  $x=0$ , другие из граничных условий – при  $x=l_1$ .

Рассмотрим пример, когда края пластинки  $x=0, l_1$  жестко закреплены, т.е. имеем граничные условия

$$W_k^{(1)} = \frac{\partial W_k^{(2)}}{\partial x} = 0; \quad (19)$$

При граничных условиях (19) числа  $n = 0$ ;  $m = 1$ .

Из граничных условий при  $x = l_1$  получаем частотное уравнение:

$$2 - \frac{\alpha_0^2 + \alpha_1^2}{\alpha_0 \alpha_1} \sin(\alpha_0 l_1) \sin(\alpha_1 l_1) - 2 \cos(\alpha_0 l_1) \cos(\alpha_1 l_1) = 0. \quad (20)$$

Аналогично выводится частотное уравнение для других комбинаций граничных условий при ( $x = 0$ ;  $l_1$ ).

Частотное уравнение (20) численно решалось на ЭВМ и на рис. 4 приведены кривые изменения двух первых частот, где  $l = \frac{l_1}{h}$ .

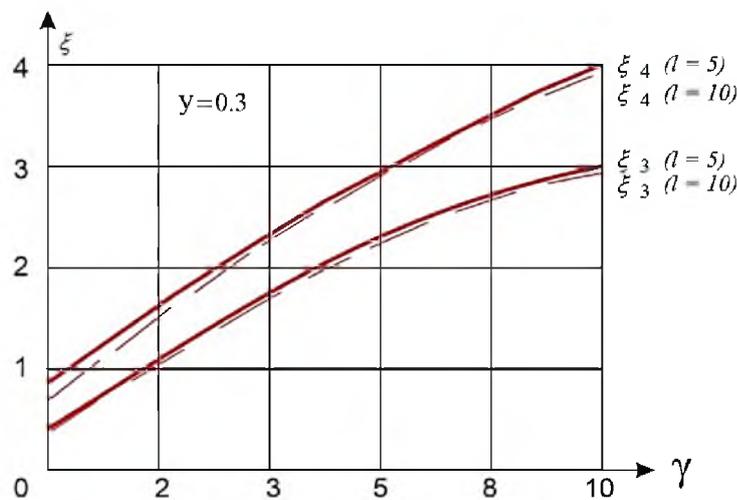


Рисунок 4. Кривые изменения двух первых частот, где  $l = \frac{l_1}{h}$

Предложенный метод определения частот собственных колебаний нетрудно обобщить и для исследования колебания пластинки, лежащей под поверхностью слоя.

*Результаты и их обсуждение.* Метод декомпозиции в теории колебания.

При более сложных условиях закрепления краев плоского элемента можно применять приближенный метод получения частотных уравнений на основе метода декомпозиции, развитого в работах профессора Г.И. Пшеничного для задачи статики [1, 2, 8, 11, 14, 15, 18].

Метод декомпозиции изложим для плоских элементов в случае упругого материала на основе уравнения (1), которое удобнее записать в виде:

$$\Delta^2 W_1^{(1)} + B_1 \left( \frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial t^2} \right) + B_2 \left( \frac{\partial^4 W_1^{(1)}}{\partial t^4} \right) - B_3 \left( \Delta \frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial t^2} \right) + P_1^{(2)}(W_1^{(1)}) = 0; \quad (21)$$

$$B_j = \frac{A_j}{A_4}; \quad f_1^{(2)}(W_1^{(1)}) = \frac{1}{A_4} P_1(W_1^{(1)}).$$

Решение уравнения (21) будем искать в виде

$$W_1^{(1)} = \exp\left(\frac{b}{h}\xi t\right) W_1^{(0)}(x, y). \quad (22)$$

Для применения метода декомпозиции введем новые зависимые и независимые переменные:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi}{l_1} x; & \beta &= \frac{\pi}{l_2} y; & W_1^{(0)} &= \frac{l_1^4}{\pi^4} v, \\ \lambda &= \frac{l_1}{l_2}; & \lambda_1 &= \frac{l_1}{\pi h}; \end{aligned} \quad (23)$$

В переменных (23) уравнения (21) принимают вид

$$\left[ \frac{\partial^4 v}{\partial \alpha^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 v}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 v}{\partial \beta^4} \right] + Q(v) = 0; \quad (24)$$

где  $Q(v)$  – остальные слагаемые дифференциального уравнения (21).

Метод декомпозиции сводится к решению двух вспомогательных задач:

1. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^4 v_1}{\partial \alpha^4} = f^{(1)}(\alpha, \beta) \quad (25)$$

при граничных условиях

$$M_1(\alpha, \beta) = 0; \quad M_2(\alpha, \beta) = 0; \quad (\alpha = 0, \pi); \quad (26)$$

2. Найти решение уравнения

$$\lambda^4 \frac{\partial^4 v_2}{\partial \beta^4} = f^{(2)}(\alpha, \beta) \quad (27)$$

при граничных условиях

$$M_3(\alpha, \beta) = 0; \quad M_4(\alpha, \beta) = 0; \quad (\beta = \pi, 0); \quad (28)$$

где вид граничных условий  $M_j(\alpha, \beta)$  зависит от условия ее закрепления или на свободном крае.

Оставшуюся часть уравнения (24) запишем в виде

$$2\lambda^2 \frac{\partial^4 v_3}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + Q(v_3) + f^{(1)}(\alpha, \beta) + f^{(2)}(\alpha, \beta) = 0; \quad (29)$$

где вид произвольных функций зависит от решаемых задач.

Следуя методу декомпозиции, будем считать, что

$$v_3 = \frac{1}{2} [v_1 + v_2] \quad (30)$$

и условие  $v_1 \cong v_2$  должно выполняться в заданных точках плоского элемента.

Общие решения уравнений вспомогательных задач (25) и (27) имеют вид

$$v_1 = f_1(\alpha, \beta) + \frac{\alpha^3}{6} \varphi_1(\beta) + \frac{\alpha^2}{2} \varphi_2(\beta) + \alpha \varphi_3(\beta) + \varphi_4(\beta); \quad (31)$$

$$v_2 = f_1(\alpha, \beta) + \frac{\beta^3}{6} \psi_1(\alpha) + \frac{\beta^2}{2} \psi_2(\alpha) + \beta \psi_3(\alpha) + \psi_4(\alpha);$$

где  $\varphi_j; \psi_j$  – произвольные функции аргументов и определяются из граничных условий (26) и (28).

В дальнейшем произвольные функции в общем виде представим как

$$f^{(j)}(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{n,m}^{(j)} \sin(\alpha n) \sin(\beta m); \quad (32)$$

где  $\alpha_{n,m}^{(j)}$  – произвольные постоянные, а функции  $f_j(\alpha, \beta)$  в общих решениях (31) равны

$$f_1(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n,m}^{(1)}}{n^4} \sin(\alpha n) \sin(\beta m); \quad (33)$$

$$f_2(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n,m}^{(2)}}{m^4} \sin(\alpha n) \sin(\beta m).$$

Используя частные решения задач при заданных граничных условиях и приближенные представления (30) для нахождения неизвестных  $\alpha_{n,m}^{(j)}$ , получаем однородную линейную систему алгебраических уравнений, нетривиальное решение которых приводит к частному уравнению.

Данный подход применим к различным краевым задачам [1, 2, 11, 13, 15, 19].

Не приводя решение широкого класса задач, отметим лишь одну, когда прямоугольная пластинка шарнирно закреплена по всем четырем краям.

В данной задаче имеем граничные условия:

$$\begin{aligned} v_1 = \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} = 0 & \quad (\alpha = 0; \pi); \\ v_2 = \frac{\partial^2 v_2}{\partial \beta^2} = 0 & \quad (\beta = 0; \pi); \end{aligned} \quad (34)$$

удовлетворяя которым, общие решения (31) получим

$$v_1 = f_1(\alpha, \beta); \quad \lambda^4 v_2 = f_2(\alpha, \beta); \quad (35)$$

удовлетворяя решение (35) условиям (3.1), для частоты  $\zeta$  вновь получаем уравнение (7).

Приближенный метод декомпозиции для сформулированной задачи дает тот же результат, что и прямой метод, изложенный в разделе 1 настоящей статьи.

Изложенный результат для шарнирно опертой пластинки позволяет сделать вывод о возможности применения данного приближенного метода декомпозиции для решения задач собственных колебаний плоского прямоугольного элемента при более сложных граничных условиях.

*Заключение.* На основе предложенного в работе уточненного математического метода расчета колебаний деформируемых слоистых сред получены приближенные уравнения колебания плоского слоистого элемента с учетом различных механических характеристик. Преложимый теоретический подход позволяет решить большинство прикладных задач по теории колебания слоистых пластин с деформируемым основанием с учетом различных

краевых условий пластины, в том числе условий свободного края. Полученные общие или приближенные уравнения в явном виде содержат как вязкоупругие операторы, так и внешние и внутренние усилия, вызывающие колебания пластинки – фундамента, в предельных случаях переходят в известные классические уравнения поперечного колебания пластин. На основе выполненного и представленного в работе теоретического и численного анализа выявлены новые механические чисто высокочастотные эффекты при колебании слоистого полупространства и приведены решения частных задач собственных и вынужденных колебаний различных плоских элементов сооружений с учетом окружающей среды.

Из решения частных прикладных задач следует, что расчет частот колебания прямоугольной шарнирно закрепленной пластинки показывает, что эти частоты комплексные, причем действительная часть этих частот отрицательна и характеризует затухание колебания пластинки за счет инерционности и деформативности основания. В случае Винклеровского основания затухание отсутствует. Таким образом, развиваемый подход к исследованию колебаний строительных конструкций и их элементов обобщает известные классические и приближенные теории.

В настоящей работе в качестве исследуемой модели принята так называемая модель Био-Френкеля, так как эта модель относительно других является достаточно обоснованной и хорошо поддается теоретическому изучению динамического взаимодействия и колебательных процессов в ней [2, 7, 8, 13, 15, 18, 19].

#### Список литературы

1. Агаларов Дж.Г., Мамедова Г.А. Колебания пластины, шарнирно закрепленной и упруго подвешенной на Винклеровском основании // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2018. – № 7. – С. 48-53.
2. Доронин А.М., Соболева В.А. Собственные колебания круглой пластинки, лежащей на переменном упругом основании типа Винклера // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2014, № 4 (1). – С. 254-258.
3. Досжанов М.Ж. Динамическое взаимодействие плоских элементов строительной конструкции с деформируемым основанием: дис. ... д-ра техн. наук. – Самара, 2000. – С. 194.
4. Досжанов М.Ж., Филиппов И.Г. Некоторые характеристики одно и двух компонентных сплошных сред в теории колебаний // Технологии бетонов. – М., 2009. – №4 (33).
5. Досжанов М.Ж., Байтасов К.Н., Танжарыков П.А., Абдикерова У.Б. Теория нестационарного динамического поведения элементов строительных конструкций с окружающей средой: Монография. – г. Шымкент, 2016. – С. 200. – ISBN 978-9965-726-98-9.
6. Био М.А. Теория деформаций пористого вязкоупругого анизотропного твердого тела // Механика. Сборник переводов и обзоров иностранной периодической литературы. – М.: Иностранная литература, 1957. – № 5. – С. 95-111.
7. Досжанов М.Ж., Ысқақ Е., Тасбергенова Г.Ж., Юсупова Л., Ержанова А.Т. Основные соотношения динамического поведения вязкоупругих сред при влиянии внешних нестационарных усилий // Междун.научн.журнал «Путь науки», «The Way of Science», ISBN 2311-2158 №2(60), 2019 (Global Impact Factor, Австралия, импакт-фактор – 0.543), (Open Academic Journals Index, Россия – 0.350). – С. 21.
8. Досжанов М.Ж., Байтасов К., Ембергенов М.А., Тасболат Г.Ж. Влияния фундаментов – оснований на колебания плоских элементов строительных сооружений // GLOBAL SCIENCE AND INNOVATIONS 2020: CENTRAL ASIA. – № 1(12). Февраль 2021. – ISSN 2664-2271.
9. Досжанов М.Ж., Байтасов К., Ембергенов М.А., Тасболат Г.Ж. Особенности двухкомпонентных сред модели М.А. Био, описывающие динамическое взаимодействие пластинки как фундамента. International Euroasia Congress on Scaientific Researches and Recent Trends 10 February 16-17, 2023 Baku, Azerbaijan. – P.60-64 ISBN 978-625-6404-89-2
10. Егорычев О.А. Приближенные поперечные колебания плоских элементов строительных конструкций. учебное пособие / О.А. Егорычев, О.О. Егорычев, О.И. Поддаева. – Москва Издательство МИСИ-МГСУ, 2017. – С.113.

11. Кныш Т.П., Абдикаримов Р.А., Сухотерин М.В., Барышников С.О. Собственные колебания прямоугольной пластины, защемленной по двум смежным краям. – С-Петербург: Magazine of Civil Engineering. – 2018, 6(82). – С. 242.
12. Масленников А. М. Динамика и устойчивость сооружений: учебник и практикум для вузов / А. М. Масленников. – Москва: Издательство Юрайт, 2023. – С. 366. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-00220-1-Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/511543> (дата обращения: 09.11.2023).
13. Medeubaev N.K., Seytmuratov, A.Zh., Ramazanov M.I. Solving Problems of Vibrational Processes of Isotropically Homogeneous Elastic Plates. Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41. – № 9. – P. 1846-1853 DOI: 10.1134/S1995080220090188 <https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:000587460100027>
14. Рамазанов М.И., Таймуратова Л.У., Медеубаев Н.К., Мукеева Г.И. Приближенные уравнения колебаний цилиндрических оболочек переменной толщины // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби Серия математика, механика, информатика. – 2019. – Vol. 4. – № 104. – P. 71-84. – <https://doi.org/10.26577/JMMCS-2019-4-m8>
15. Сейтмуратов А., Тилебай С., Токсанова С., Ибрагимова Н., Досжанов Б. The problem of the oscillation of the elastic layer bounded by rigid boundaries. News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series, ISSN 1991-346X. Vol. 5, Number 321. – P.42-48. – DOI: <https://doi.org/10.32014/2018.2518-1726.6> Опубликовано 2018, Дата индексации 2018-12-03. – <https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:000450801400006>.
16. Сейтмуратов А.Ж. Приближенный метод определения частот собственных колебаний пластинки // International scientific and practical conference «Modern problems of physics of metals» Baku, Azerbaijan 10-11 June, 2016.
17. Сейтмуратов А.Ж., Сейлова З.Т., Тилеубай С.Ш., Смаханова А.К., Серікбол М.С. Применение математического метода И.Г. Филиппова при решении краевых задач колебания цилиндрических оболочек // Известия Национальной академии наук Республики Казахстан ISSN 1991- 346X. – Volume 4, Number 320 (2018). – P. 66-71.
18. Сейтмуратов А.Ж., Нурғалиева А.С. Решение задач частоты собственных колебаний плоского элемента методом декомпозиций // Знание. – М. 2020., 2(78). – С. 70-75.
19. Medeubaev N.K., Seytmuratov A.Zh., Ramazanov M.I. Solving problems on the vibrational processes of isotropically homogeneous elastic plates. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020. – Tom. 41. – № 9, – S. 1846-1853 <http://link.springer.com/article/10.1134/S1995080220090188> Импакт-фактор журнала 2021.0,62 Квартиль категории web of science Q3.
20. Результаты современных научных исследований и разработок: сборник статей XI Всероссийской научно-практической конференции. – Пенза: МЦНС «Наука и Просвещение». – 2020. – С. 314. ISBN 978-5-00159-629-5.

#### References

1. Agalarov Dzh.G., Mamedova G.A. Vibrations of a plate pivotally fixed and elastically suspended on a Winkler base // Mezhdunarodnyj zhurnal prikladnyh i fundamental'nyh issledovanij. – 2018. – № 7 – S. 48-53.
2. Doronin A.M., Soboleva V.A. Natural vibrations of a circular plate lying on a variable elastic base of the Winkler type // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo, 2014. – № 4 (1). – S. 254-258.
3. Doszhanov M.Zh. Dynamic interaction of flat elements of a building structure with a deformable base: dis. ... d-ra tekhn. nauk. – Samara, 2000. – S. 194.
4. Doszhanov M.Zh., Filippov I.G. Some characteristics of one- and two-component continuous media in the theory of oscillations // Tekhnologii betonov. – М., 2009. – №4 (33).
5. Doszhanov M.Zh., Bajtasov K.N., Tanzharykov P.A., Abdikerova U.B. Theory of non-stationary dynamic behavior of building structure elements with the environment: Monografiya. – g. SHymkent, 2016. – S. 200. – ISBN 978-9965-726-98-9
6. Bio M. A. Theory of deformations of a porous viscoelastic anisotropic solid // Mekhanika. Sbornik perevodov i obzоров inostrannoј periodicheskој literatury. – М.: Inostrannaya literatura, 1957. – № 5. – S. 95-111.
7. Doszhanov M.Zh., Ysqaq E., Tasbergenova G.Zh., YUsupova L., Erzhanova A.T. The main relations of the dynamic behavior of viscoelastic media under the influence of external unsteady

- forces // *Mezhdun.nauchn.zhurnal «Put' nauki», «The Way of Science»*, ISBN 2311-2158 №2(60), 2019 ( Global Impact Factor, Avstraliya, impakt-faktor – 0.543), (Open Academic Journals Index, Rossiya – 0.350). – S. 21.
8. Doszhanov M.ZH., Bajtasov K., Embergenov M.A., Tasbolat G.ZH. The influence of foundations on the vibrations of flat elements of building structures // *GLOBAL SCIENCE AND INNOVATIONS 2020: CENTRAL ASIA*. – № 1(12). Fevral' 2021. –2664-2271
  9. Doszhanov M.ZH., Bajtasov K., Embergenov M.A., Tasbolat G.ZH. Features of two-component media of the M.A.Bio model describing the dynamic interaction of a plate as a foundation // *International Euroasia Congress on Scaientific Researches and Recent Trends 10*, February 16-17, 2023. – Baku, Azerbaijan. – P.60-64. – ISBN 978-625-6404-89-2.
  10. Egorychev O.A. Approximate transverse vibrations of flat elements of building structures. *Uchebnoe posobie / O.A. Egorychev, O.O. Egorychev, O.I. Poddaeva-Moskva Izdatel'stvo MISI-MGSU*, 2017. – S. 113.
  11. Knysh T.P., Abdikarimov R.A., Suhoterin M.V., Baryshnikov S.O. Natural vibrations of a rectangular plate pinched at two adjacent edges. *S-Peterburg // Magazine of Civil Engineering*. – 2018, 6(82). – S. 242.
  12. Maslennikov A. M. Dynamics and stability of structures: textbook and workshop for universities / A.M. Maslennikov. – Moskva: Izdatel'stvo YUrajt, 2023. – S. 366. – (Vyssee obrazovanie). – ISBN 978-5-534-00220-1. – Tekst: elektronnyj // *Obrazovatel'naya platforma YUrajt [sajt]*. – URL: <https://urait.ru/bcode/511543> (data obrashcheniya: 09.11.2023).
  13. Medeubaev N.K., Seytmuratov, A.Zh., Ramazanov M.I. Solving Problems of Vibrational Processes of Isotropically Homogeneous Elastic Plates // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2020. – Vol. 41. – № 9. – P. 1846 1853. – DOI:10.1134/S1995080220090188 <https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:000587460100027>
  14. Ramazanov M.I., Tajmuratova L.U., Medeubaev N.K., Mukeeva G.I. Approximate equations of vibrations of cylindrical shells of variable thickness // *Vestnik KazNU imeni Al'-Farabi Seriya matematika, mekhanika, informatika*. – 2019. – Vol. 4. – № 104. – P. 71-84. – <https://doi.org/10.26577/JMMCS-2019-4-m8>
  15. Sejtmuratov A., Tilebaj S., Toksanova S., Ibragimova N., Doszhanov B. The problem of the oscillation of the elastic layer bounded by rigid bouhdaries. *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series*, ISSN 1991-346H. Volume 5, Number 321. – P. 42-48 DOI: <https://doi.org/10.32014/2018.2518-1726.6> Opublikovano 2018, Data indeksacii 2018-12-03 <https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:000450801400006>
  16. Sejtmuratov A.ZH. An approximate method for determining the frequencies of natural vibrations of a plate // *International scientific and practical conference «Modern problems jf physics of metais» Baku, Azerbaijan 10-11 June, 2016*
  17. Sejtmuratov A.ZH., Sejlova Z.T., Tileubaj S.SH., Smahanova A.K., Serikbol M.S. Application of the mathematical method of I.G.Filippov in solving boundary value problems of vibrations of cylindrical shells *Izvestiya. Nacional'noj akademii nauk Respubliki Kazahstan*. – ISSN 1991-346H. – Vol. 4, Number 320 (2018). – P. 66-71.
  18. Sejtmuratov A.ZH., Nurgalieva A.S. Solving problems of the natural oscillation frequency of a plane element by the decomposition method // *Znanie*. – M. 2020, 2(78). – S. 70-75.
  19. Medeubaev N.K., Seytmuratov A.Zh., Ramazanov M.I. Solving problems on the vibrational processes of isotropically homogeneous elastic plates // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2020. – Tom. 41. – № 9. – S. 1846-1853. – <http://link.springer.com/article/10.1134/S1995080220090188>. – *Impakt-faktor zhurnala 2021. 0,62 Kvartil' kategorii web of science Q3*.
  20. Results of modern scientific research and development: sbornik statej XI Vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii. – Penza: MCNS «Nauka i Prosveshchenie». – 2020. – S. 314. – ISBN 978-5-00159-629-5.
- 
-