МАТЕМАТИКА
МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

DOI 10.51885/1561-4212_2023_3_63
МРНТИ 27.35.17

Н.М. Темирбеков[1], А.К. Тураров[2]
[1]Национальная инженерная академия Республики Казахстан г. Алматы, Казахстан
*E-mail: temirbekov@rambler.ru**,
[2]НАО «Восточно-Казахстанский технический университет имени Д. Серикбаева»,
г. Усть-Каменогорск, Казахстан
E-mail: t010183@gmail.com

ГАЗЛИФТ ҮРДІСІНІҢ МОДЕЛІН САНДЫҚ ШЕШУ ЖӘНЕ ЗЕРТТЕУ

ИССЛЕДОВАНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ ГАЗЛИФТНОГО ПРОЦЕССА

INVESTIGATION AND NUMERICAL SOLUTION OF THE MODEL OF THE GAS LIFT PROCESS

Аннотация. *Рассматривается модель газлифтного процесса, где движение в газлифтной скважине описывается уравнениями в частных производных гиперболического типа. Система, описывающая изучаемый процесс, состоит из уравнений движения, неразрывности, уравнений термодинамического состояния, гидравлического сопротивления. Построена двухслойная разностная схема Лакса-Вендроффа для численного решения задачи. Проводится исследование устойчивости разностных схем для модельной задачи методом априорных оценок и приводится алгоритм численной реализации модели газлифтного процесса.*
Ключевые слова: *сжимаемая жидкость, уравнения Эйлера, априорная оценка, предиктор, корректор, схема Лакса-Вендроффа, газлифт.*

Аңдатпа. *Газлифттік ұңғымадағы қозғалыс гиперболалық типті дербес дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын газлифттік үрдістің моделі қарастырылады. Зерттелетін процесті сипаттайтын жүйе қозғалыс, үздіксіздік, термодинамикалық күй және гидравликалық кедергі теңдеулерінен тұрады. Есептің сандық шешіміне арналған екі қабатты Лакс-Вендрофф айырымы схемасы тұрғызылған. Модельдік есеп бойынша айырымдық схемаларының тұрақтылығы априорлық бағалау әдісімен зерттеліп, газлифттік процесс моделін сандық жүзеге асыру алгоритмі ұсынылған.*
Түйін сөздер: *сығылатын сұйықтық, Эйлер теңдеулері, априорлық бағалау, предиктор, корректор, Лакс-Вендрофф схемасы, газлифт.*

Abstract. *A model of a gas-lift process is considered, where the motion in a gas-lift well is described by partial differential equations of hyperbolic type. The system describing the process under study consists of the equations of motion, continuity, equations of the thermodynamic state, and hydraulic resistance. A two-layer Lax-Wendroff difference scheme for the numerical solution of the problem is constructed. The stability of difference schemes for the model problem is studied by the method of a priori estimates, and an algorithm for the numerical implementation of the gas-lift process model is presented.*
Keywords: *compressible fluid, Euler equations, a priori estimate, predictor, corrector, Lax-Wendroff scheme, gas lift.*

Введение. Основными преимуществами газлифтного метода добычи нефти являются возможность успешной эксплуатации скважин при высоких газовых факторах, при высоких давлениях насыщения, при давлениях в забое скважины ниже давления насыщения Математическому моделированию этих процессов посвящено очень большое количество работ [1] – [9], [36], [37]. Одним из наиболее эффективных и экономичных методов нефтедобычи является метод газлифта, который играет важную роль после фонтанного процесса. Основной характеристикой газлифтных скважин является зависимость дебита скважины от объемного расхода закачиваемого газа.

Целю работы является разработка и исследование математической модели алгоритмов расчета режима работы газлифтной скважины для оперативного управления её работой (Построение и исследование разностных схем для задачи многофазной динамической модели газлифтного процесса) [10].

Задачи работы разработать алгоритмы вычисления параметров модели и расчета режима работы газлифтной скважины с помощью полученной математической модели и получение оценки для доказательства устойчивости разностной схемы.

Рассмотрим начально-краевую задачу, описывающую движение жидкости в газлифтных скважинах:

$$\rho(x,t)\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla(\vec{v})\right)+\nabla P(\rho)=-\frac{\lambda_c}{2d_{\text{г}}}\rho\vec{v}|\vec{v}|+\vec{f} \tag{1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v})=0, \tag{2}$$

$$P=P(\rho), \tag{3}$$

$$\rho|_{t=0}=\rho_0(x),\vec{v}|_{t=0}=\vec{v}_0(x),\vec{v}|_s=0, \tag{4}$$

в которой неизвестными функциями являются плотность $\rho(x,t)$ и вектор скорости $\vec{v}(x,t)=(v_1(x,t),...,v_n(x,t))$ вязкой сжимаемой жидкости, заполняющей ограниченную область Ω , $\Omega\subset R^n$, с границей S. Размерность n равна 1, 2 или 3. Скорость $\vec{v}_0(x)$ и плотность $\rho_0(x)$ в начальный момент заданы, причем $\rho_0(x)>0$. Коэффициенты гидравлического сопротивления λ_c, гидравлический диаметр канала $d_{\text{г}}$ являются некоторыми положительными постоянными, а давление $P(\rho)$ - функция положительного аргумента с непрерывной по Липщицу первой производной. Плотность ρ и вектор скорости $\vec{v}$ записаны в Эйлеровых переменных $(t,x)\in Q=[0,T]\cup\Omega$.

Система уравнений, описывающая состояние вязкой, сжимаемой жидкости, в отличие от уравнений (1) содержит еще и вязкие члены в правой части. Вопрос разрешимости задачи Коши на малом интервале времени для такой системы рассматривался в работах [16] и [17]. Теорема о локальной разрешимости начально-краевой задачи для уравнений вязкой, сжимаемой жидкости доказана в работе [18]. Локальная теорема существования решения одномерной начально-краевой задачи для уравнений движения вязкого совершенного политропного газа в лагранжевых массовых координатах доказана в [19]. В работе [19] изложена методика исследования «в целом» по времени начально-краевых задач для системы уравнений, описывающей одномерное течение вязкого теплопроводного газа.

Для решения систем уравнений динамики вязкого сжимаемого газа в настоящее время используются различные численные методы [20] – [26]. Однако математические доказательства их устойчивости и сходимости к решению дифференциальной задачи отсутствуют. Это связано с нелинейностью уравнений, а также с неэволюционностью рассматриваемой системы. Для некоторых задач динамики вязкого баротропного газа оценка погрешности разностных схем получена в работе Кузнецова Б.Г., Смагулова Ш. [27] – [28]. В работе [29] предлагается и исследуется новая разностная схема для уравнений одномерного вязкого теплопроводного газа. Исследования нелинейных разностных схем в окрестности известного решения конкретных задач математической физики проводились авторами работ [30], [31].

В работе [32] проводится сравнение характеристик различных разностных схем для уравнений Эйлера при решений ряда модельных задач газовой динамики и газодинамических процессов. В работе [33] предлагается новая разностная схема для нестационарного движения вязкого баротропного газа в переменных Эйлера. Положительность функции плотности обеспечивается тем, что ищутся не сами значения функции плотности, а натуральные логарифмы этих величин.

Разработка и исследование разностных схем для численного решения систем уравнений газовой динамики позволяет получать одновременно точные и монотонные решения.

В настоящей работе строится двухслойная разностная схема Лакса-Вендроффа (типа предиктор-корректор) для решения задачи (1)-(4). Методом энергетических неравенств получены априорные оценки для разностной задачи.

Система дифференциальных уравнений в частных производных для математического моделирования газлифтной скважины.

Рассмотрим одномерный вариант алгоритма [10], [11] – [15]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u}{\partial x}=0, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial\rho u}{\partial t}+\frac{\partial\rho u^2}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\lambda_c}{2d_{\text{г}}}\rho u|u|+f, \qquad (6)$$

$$\rho(x,0)=\rho_0(x), v(x,0)=v_0(x), \qquad (7)$$

$$v(0,t)=v(0,1)=0.$$

Соответствующая (5)-(7) разностная схема имеет вид:

– предиктор

$$\frac{\rho_{i+1/2}^{n+1/2}-0.5(\rho_{i+1}^n+\rho_i^n)}{\tau/2}+\frac{\rho_{i+1}^n u_{i+1}^n-\rho_i^n u_i^n}{h}=0, \qquad (8)$$

$$\frac{\rho_{i+1/2}^{n+1/2}u_{i+1/2}^{n+1/2}-0.5(\rho_{i+1}^n u_{i+1}^n+\rho_i^n u_i^n)}{\tau/2}+\frac{\rho_{i+1}^n(u_{i+1}^n)^2-\rho_i^n(u_i^n)^2}{h}+$$

$$+\frac{p_{i+1}^n-p_i^n}{h}=-\frac{\lambda_c}{2d_{\text{г}}}\rho_i^n u_i^n|u_i^n|+f_i^n, \qquad (9)$$

- корректор

$$\frac{\rho_{i+1}^n-\rho_i^n}{\tau}+\frac{\rho_{i+1/2}^{n+1/2}u_{i+1/2}^{n+1/2}-\rho_{i-1/2}^{n+1/2}u_{i-1/2}^{n+1/2}}{h}=0, \qquad (10)$$

$$\frac{\rho_i^{n+1}u_i^{n+1}-\rho_i^n u_i^n}{\tau}+\frac{\rho_{i+1/2}^{n+1/2}\left(u_{i+1/2}^{n+1/2}\right)^2-\rho_{i-1/2}^{n+1/2}\left(u_{i-1/2}^{n+1/2}\right)^2}{h}+$$

$$+\frac{p_{i+1/2}^{n+1/2}-p_{i-1/2}^{n+1/2}}{h}=-\frac{\lambda_c}{2d_{\text{г}}}\rho_{i+1/2}^{n+1/2}u_i^{n+1/2}|u_i^{n+1/2}|+f_i^{n+1/2}, \qquad (11)$$

$$\rho_i^0=\rho_0(x_i), v_i^0=v_0(x_i), i=1,2,...,M-1 \qquad (12)$$

$$v_0^n=0, v_M^n=0, n=0,1,...,N.$$

Из (8), (9), (10) исключая промежуточные значения $\rho_{i+1/2}^{n+1/2}$ и $u_{i+1/2}^{n+1/2}$ имеем

$$\rho_{t,i}^n+(\rho_i^n u_i^n)_{\overset{\circ}{x}}-\frac{\tau}{2}(\rho_i^n(u_i^n)^2)_{\bar{x}x}-\frac{\tau h}{2}p_{\bar{x}x,i}^n-\frac{\tau\lambda_c}{2d_{\text{г}}}(\rho_i^n u_i^n|u_i^n|)_{\overset{\circ}{x}}+\tau f_{\overset{\circ}{x},i}^n=0. \qquad (13)$$

Приведем сначала методику применения энергетических неравенств для модельного уравнения переноса при $u(x,t)=a=\text{const}$

$$y_{t,i}^n+\text{a}y_{\overset{\circ}{x},i}^n-\frac{a^2\tau}{2}y_{\bar{x}x,i}^n=0, \qquad (14)$$

$$y_0^n=y_M^n=0, y_i^0=\rho_0(x_i).$$

Учитывая, что $y_{\overset{\circ}{x},i}^n=0.5\left(y_{\bar{x},i}^n+y_{x,i}^n\right)$, разностное соотношение (14) перепишем в виде

$$y_{t,i}^n+\frac{a}{2}\left(y_{\bar{x},i}^n+y_{x,i}^n\right)-\frac{a^2\tau}{2}y_{\bar{x}x,i}^n=0. \qquad (15)$$

Умножим (15), взятое на слое n, на $2\tau\text{h}y_i^{n+1}$ и полученное равенство просуммируем по i от 1 до $M-1$.

$$2\tau\sum_{i=1}^{M-1}y_{t,i}^n y_i^{n+1}h+a\tau\sum_{i=1}^{M-1}y_{\bar{x},i}^n y_i^{n+1}h+a\tau\sum_{i=1}^{M-1}y_{x,i}^n y_i^{n+1}h-a^2\tau^2\sum_{i=1}^{M-1}y_{\bar{x}x,i}^n y_i^{n+1}h=0. \qquad (16)$$

Учитывая, что

$$2\tau y_{t,i}^n y_i^{n+1} = \left(y_i^{n+1}\right)^2 - (y_i^n)^2 + \tau^2\left(y_{t,i}^n\right)^2 \tag{17}$$

и применяя формулы разностного дифференцирования, из (16) имеем

$$||y^{n+1}||^2 - ||y^n||^2 + \tau^2||y_t^n||^2 - a\tau\sum_{i=1}^{M-1} y_{x,i}^{n+1}y_i^n h + y_M^{n+1}y_{M-1}^n - y_0^n y_0^{n+1} - a\tau\sum_{i=1}^{M} y_{\bar{x},i}^{n+1}y_i^n h +$$
$$+y_M^{n+1}y_M^n - y_0^n y_1^{n+1} + a^2\tau^2\sum_{i=1}^{M} y_{\bar{x},i}^{n+1}y_{\bar{x},i}^n h - y_M^{n+1}y_{\bar{x},M}^n - y_{x,0}^n y_0^{n+1}=0. \tag{18}$$

В силу граничных условий (14) имеем, что $y_0^n = y_M^n$=0,$y_0^{n+1} = y_M^{n+1}$=0

$$||y^{n+1}||^2 - ||y^n||^2 + \tau^2||y_t^n||^2 + a^2\tau^2\sum_{i=1}^{N}\left(y_{\bar{x},i}^n\right)^2 h =$$
$$= -a^2\tau^3\sum_{i=1}^{N} y_{\bar{x},i}^n y_{\bar{x},t}^n h + a\tau^2\left(\sum_{i=1}^{M-1} y_{\text{xt},i}^n y_i^n h + \sum_{i=1}^{M} y_{\text{xt}}^n y_i^n h\right). \tag{19}$$

Здесь использованы соотношения

$$[y^n, y_x^n) + (y^n, y_{\bar{x}}^n] = (y^n, y_x^n) + (y^n, y_{\bar{x}}^n) = (y^n, y_x^n) + y_M^n, y_{M-1}^n - y_0^n, y_0^n - [y_x^n, y^n) =$$
$$= (y^n, y_x^n) - [y_x^n, y^n) = (y^n, y_x^n) - (y^n, y_x^n)=0.$$

Оценим члены, стоящие в правой части (19), через члены левой части и известные величины следующим образом:

$$j_1^n = \left|a^2\tau^3\sum_{i=1}^{N} y_{\bar{x},i}^n y_{\bar{x},t}^n h\right| \le a^2\tau^3\left(\varepsilon_1^2||y_{\bar{x}}^n]|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1^2}||y_{\bar{x},t}^n]|^2\right).$$

Далее используем известное неравенство [6]

$$||y_{\bar{x}t}^n]|^2 \le \frac{4}{h^2}||y_t^n||^2$$

и получим

$$j_1^n \le a^2\tau^3\varepsilon_1^2||y_{\bar{x}}^n]|^2 + \frac{a^2\tau^3}{\varepsilon_1^2 h^2}||y_t^n||^2. \tag{20}$$

Теперь оценим второе слагаемое правой части (19), используя неравенство [6]

$$\frac{h^2}{4}|[y_x||^2 \le ||y||^2 \le \frac{l^2}{8}|[y_x||^2$$

и ε- неравенство:

$$j_2^n = a\tau^2|[y_{\text{xt}}^n, y^n) + (y_{\bar{x}t}^n, y^n]| \le a\tau^2\frac{4}{h^2}||y_t^n||\cdot||y^n|| + a\tau\frac{4}{h^2}||y_t^n||\cdot||y^n|| =$$
$$= \frac{4a\tau^2}{h}||y_t^n||\cdot||y^n|| \le \frac{a\tau^2 l^2}{2h^2}||y_t^n||\cdot||y_{\bar{x}}^n|| \le \frac{\mathrm{a}l^2}{2h^2}\left|\left(\tau^{3/2}||y_t^n||\right)\cdot\left(\tau^{1/2}||y_{\bar{x}}^n]|\right)\right| \le$$
$$\frac{\mathrm{a}l^2\tau\varepsilon_2^2}{2h^2}||y_{\bar{x}}^n]|^2 + \frac{\mathrm{a}l^2\tau^3}{8h^2\varepsilon_2^2}||y_t^n||^2. \tag{21}$$

Из (19), (20), (21), группируя подобные члены, имеем

$$||y^{n+1}||^2 - ||y^n||^2 + \tau^2\left(1 - \frac{a^2\tau}{h^2\varepsilon_1^2} - \frac{\mathrm{a}l^2\tau}{8h^2\varepsilon_2^2}\right)||y_t^n||^2 + \left(a^2\tau^2 - a^2\tau^3\varepsilon_1^2 - \frac{\mathrm{a}l^2\tau\varepsilon_2^2}{2h^2}\right)||y_{\bar{x}}^n]|^2 \le 0. \tag{22}$$

Положим

$$\varepsilon_1^2 = \frac{2a}{h}, \varepsilon_2^2 = \frac{l^2}{4h}$$

и из (22) получим

$$||y^{n+1}||^2 - ||y^n||^2 + \tau^2\left(1 - \frac{a\tau}{h}\right)||y_t^n||^2 + \left(a^2\tau^2 - \frac{2a^3\tau^3}{h} - \frac{\mathrm{a}l^4\tau}{8h^3}\right)||y_{\bar{x}}^n]|^2 \le 0. \tag{23}$$

Наложим на h, τ и a условие

$$1 - \frac{a\tau}{h}>0. \tag{24}$$

Тогда получим неравенство

$$||y^{n+1}||^2 - ||y^n||^2 + \mathrm{a}\tau\left(\mathrm{a}\tau - \frac{2a^2\tau^2}{h} - \frac{l^4}{8h^3}\right)||y_{\bar{x}}^n]|^2 \le 0$$

которое позволяет оценить $||y^n||$ и $||y_{\bar{x}}^n]|$, если взять

$$\mathrm{a}\tau - \frac{2a^2\tau^2}{h} - \frac{l^4}{8h^3} \ge 0. \qquad (25)$$

Действительно, если коэффициент при $||y_{\bar{x}}^n]|^2$ неотрицателен,

$$||y^{n+1}|| \le ||y^n|| \le \dots \le ||y^0||.$$

Уравнение (6) с учетом уравнения неразрывности (5) и условия положительности плотности ρ напишем в недивергентном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\lambda_c}{2d}u \cdot |u| + f \qquad (26)$$

где $g = \ln\rho$. Тогда схема Лакса-Вендроффа для уравнения (26) имеет вид

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - 0.5(u_{i+1}^n + u_i^n)}{\tau/2} + \frac{1}{2}\left[u_{i+1}^n\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} + u_i^n\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h}\right] +$$

$$+\frac{g_{i+1}^n - g_i^n}{h} = -\frac{\lambda_c}{2d}u_{i+1/2}^n \cdot |u_{i+1/2}^n| + f_{i+1/2}^n \qquad (27)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau/2} + \frac{1}{2}\left[u_{i+1/2}^{n+1/2}\frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}}{h} + u_{i-1/2}^{n+1/2}\frac{u_{i-1/2}^{n+1/2} - u_{i-3/2}^{n+1/2}}{h}\right] +$$

$$+\frac{g_{i+1/2}^{n+1/2} - g_{i-1/2}^{n+1/2}}{h} = -\frac{\lambda_c}{2d}u_i^{n+1/2} \cdot |u_i^{n+1/2}| + f_i^{n+1/2}. \qquad (28)$$

Умножим уравнение (27) на $\tau u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}h$ и просуммируем по внутренним узлам сетки:

$$\left\|u^{n+\frac{1}{2}}\right\|^2 + \frac{\tau^2}{2}\left\|u^{n+\frac{1}{2}} - u^n\right\|^2 + \frac{4}{h^2}\left|[u_{\bar{x}}^{n+\frac{1}{2}}]\right|^2 + \frac{\tau}{2}\sum_{i=1}^{M-1}\left(u_{i+1}^n u_{x,i}^n + u_i^n u_{\bar{x},i}^n\right)u_{i+\frac{1}{2}}^n h +$$

$$+\frac{\tau}{2}\sum_{i=1}^{M-1}\left(u_{i+1}^n u_{x,i}^n + u_i^n u_{\bar{x},i}^n\right)\left(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2}}^n\right) + \frac{\tau\lambda_c}{2d}\sum_{i=1}^{M-1}u_{i+\frac{1}{2}}^n\left|u_{i+\frac{1}{2}}^n\right|u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}h +$$

$$+\tau\sum_{i=1}^{M-1}u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}g_{x,i}^n h = 2||u^n||^2 + \tau\sum_{i=1}^{M-1}u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}f_{i+\frac{1}{2}}^n h. \qquad (29)$$

Оценим скалярные произведения в (29). Для члена, порожденного нелинейными слагаемыми, используем неравенство Коши и неравенства из [34]:

$$|j_1| \equiv \frac{\tau}{2}\left|\sum_{i=1}^{M-1}\left(u_{i+1}^n u_{x,i}^n + u_i^n u_{\bar{x},i}^n\right)\left(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2}}^n\right)\right| \le$$

$$\le \frac{\tau}{h}\||u^n|^2\|\left\|u^{n+\frac{1}{2}} - u^n\right\| \le \frac{2\tau}{h}\|u^n\|^{\frac{1}{2}}\|u_x^n\|^{\frac{1}{2}}\left\|u^{n+\frac{1}{2}} - u^n\right\| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon_1\tau}{h}\left\|u^{n+\frac{1}{2}} - u^n\right\|^2 + \frac{2\tau}{\varepsilon_1 h^2}\|u^n\|^2,$$

аналогично

$$|j_2| \equiv \frac{\tau}{2}\left|\sum_{i=1}^{M-1}\left(u_{i+1}^n u_{x,i}^n + u_i^n u_{\bar{x},i}^n\right)u_{i+\frac{1}{2}}^n\right| \leq \frac{2\tau}{h}\|u^n\|^{\frac{1}{2}}\|u_x^n\|^{\frac{1}{2}}\|u^n\| \leq \frac{\tau}{h}\left(1+\frac{2}{h}\right)\|u^n\|^2.$$

Для слагаемого $j_3 \equiv \frac{\tau\lambda_c}{2d}\sum_{i=1}^{M-1} u_{i+\frac{1}{2}}^n \left|u_{i+\frac{1}{2}}^n\right| u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} h$ используя разностный аналог теоремы вложения и ε-неравенство получим:

$$|j_3| \leq \frac{\tau\lambda_c}{2d}\|u^n\|^2\left\|u^{n+\frac{1}{2}}\right\| \leq \frac{\varepsilon_1\tau\lambda_c}{4d}\|u^n\|^2 + \frac{1}{16\varepsilon_1}\|u^n\|^2\left|\left|u_{\bar{x}}^{n+\frac{1}{2}}\right]\right|^2.$$

Используя формулу суммирования по частям к последнему слагаемому в левой части (29), получим

$$|j_4| \leq \tau\left\|u_{\bar{x}}^{n+\frac{1}{2}}\right\|\|g\| \leq \frac{\varepsilon_1\tau}{2}\left\|u_{\bar{x}}^{n+\frac{1}{2}}\right\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon_1}\|g\|^2.$$

Слагаемое в правой части уравнения (29) оценим следующим образом:

$$|j_5| \leq \frac{\tau}{2}\left\|u^{n+\frac{1}{2}}\right\|\|f^n\| \leq \frac{\varepsilon_1\tau}{16}\left\|u_{\bar{x}}^{n+\frac{1}{2}}\right\|^2 + \frac{\tau}{8\varepsilon_1}\|f^n\|^2.$$

Подставляя полученные неравенства в (29) и предполагая, что выполняются неравенства $(\tau h - 2\varepsilon_1)/2h > 0$, $\frac{4}{h^2} - \frac{9\varepsilon_1\tau}{16} - \frac{1}{16\varepsilon_1}\|u^n\|^2 > 0$, получим неравенство

$$\left\|u^{n+\frac{1}{2}}\right\|^2 \leq c_1\|u^n\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon_1}\|g\|^2 + \frac{\tau}{8\varepsilon_1}\|f^n\|^2. \quad (30)$$

Аналогично, умножим уравнение (28) на $\tau u_i^{n+1} h$ и просуммируем по внутренним узлам сетки:

$$\|u^{n+1}\|^2 + \tau^2\|u_t^n\|^2 + \frac{4}{h^2}\left|\left|u_{\bar{x}}^{n+1}\right]\right|^2 + \frac{\tau}{2}\sum_{i=1}^{M-1}\left(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} u_{x,i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} u_{\bar{x},i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right)u_i^n h +$$

$$+\frac{\tau}{2}\sum_{i=1}^{M-1}\left(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} u_{x,i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} u_{\bar{x},i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right)u_{t,i}^n h + \frac{\tau\lambda_c}{2d}\sum_{i=1}^{M-1} u_i^{n+\frac{1}{2}}\left|u_i^{n+\frac{1}{2}}\right| u_i^{n+1} h +$$

$$+\tau\sum_{i=1}^{M-1} u_i^{n+1} g_{x,i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} h = 2\|u^n\|^2 + \tau\sum_{i=1}^{M-1} u_i^n f_i^{n+\frac{1}{2}} h. \quad (31)$$

Оценивая скалярные произведения, как и для уравнения (29), получим аналогичную оценку

$$\|u^{n+1}\|^2 \leq c_2\|u^n\|^2 + c_3\tau\|g\|^2 + c_3\tau\left\|f^{n+\frac{1}{2}}\right\|^2. \quad (32)$$

Складывая неравенства (30) и (32), получим

$$\|u^{n+1}\|^2 \leq c_4\|u^n\|^2 + c_5\tau\|g\|^2 + c_6\tau\left(\|f^n\|^2 + \left\|f^{n+\frac{1}{2}}\right\|^2\right).$$

Используя полученное неравенство, можно показать выполнение цепочки неравенств $\|u^{n+1}\| \leq \|u^n\| \leq \ldots \leq \|u^0\|$.

Заключение. Таким образом, в работе рассмотрена задача движения жидкости в газлифтной скважине. В данной работе рассмотрена одномерная модель газлифтной скважины, в которой предполагается, что поток в кольцевой части и скважине двухфазный и изотермический [10]. Система, описывающая изучаемый процесс, состоит из уравнений движения, неразрывности и скорости, которые позволяют получить формулу для определения плотности жидкой фазы в явном виде. Проведено исследование разработанной двухслойной разностной схемы Лакса-Вендроффа для численного решения задачи и методом энергетических неравенств получены априорные оценки для разностной задачи.

Список литературы

1. Ф.А. Алиев, М.А. Джамалбеков, Н.А. Велиев, И.Р. Гасанов, Н.А. Ализаде. Алгоритмы для компьютерного моделирования процесса эксплуатации нефтяных скважин штанговыми насосами в системе скважина-пласт / ISSN0032–8243. Прикл. механика, 2019, Том 55, No 3
2. Трубавин С. Н., Ульянов В. В., Кибирев Е. А. Результаты проведения ОПИ по оптимизации газлифтной эксплуатации скважин на Оренбургском НГКМ // Экспозиция Нефть Газ. – 2017. – № 5. – С. 36-39.
3. Ulyanov V.V., Kuchurin A.S., Kibirev E.A. Implementation of the Intellectual Gas Control System for Gas Lift Optimization at Orenburgskoe Oilfield // 2018. SPE paper 191533-18RPTC-MS
4. Develop optimum gas lift methods to improve gas lift efficiency using gas lift pack-off, deep gas lift, and deep lift set / N. Lashari [et al.] // International Journal of Advanced Research in Engineering and Technology (IJARET). - 2020. - November. - V. 11. - Issue 11. - P. 1096-1114.
5. Минханов, С.А. Долгих, М.А. Варфоломеев, Разработка нефтяных и газовых месторождений. учеб. пособие для вузов / Казанский федеральный университет. – Казань, 2019. – 96 с.
6. Нгиа Т.Т., Велиев М.М. Газлифтная эксплуатация скважин. – СПб.: Недра, 2016. – 384 с.
7. Исторические аспекты внедрения бескомпрессорного газлифта в СП «Вьетсовпетро» / Т.Т. Нгиа, М.М. Велиев, В.А. Бондаренко [и др.] // Нефтяное хозяйство. – 2018. – № 6. – С. 127–131.
8. Арбузов, В. Н. Геология. Технология добычи нефти и газа. Практикум / В.Н. Арбузов, Е.В. Курганова. - М.: Юрайт, 2020. - 705 с.
9. Вадецкий, Ю. В. Бурение нефтяных и газовых скважин / Ю.В. Вадецкий. - М.: Академия, 2020. - 352 с.
10. Темирбеков Н.М., Тураров А.К. Численное решение динамической модели газлифтного процесса. Вестник КазНИТУ, - 2016 г., №6 (118), – С. 338-344.
11. Купреенко А.И., Исаев Х.М., Михайличенко С.М. Гидрогазодинамика. Примеры решения задач. – Брянск: Изд-во Брянский государственный аграрный университет, 2020. — 48 с.
12. Петров, А.Г. Аналитическая гидродинамика: Идеальная несжимаемая жидкость / А.Г. Петров. - М.: Ленанд, 2017. - 368 с.
13. Павловский, В.А. Вычислительная гидродинамика. Теоретические основы: Учебное пособие / В.А. Павловский, Д.В. Никущенко. - СПб.: Лань, 2018. - 368 с.
14. Бубнов, В.А. Гидродинамика: Механика частицы жидкости / В.А. Бубнов. - М.: Ленанд, 2018. - 304 с.
15. Р.В. Жалнин, В.Ф. Масягин, Е.Е. Пескова, В.Ф. Тишкин Априорные оценки локального разрывного метода Галеркина наразнесенных сетках для решения уравнения параболического типа врамках однородной задачи Дирихле // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия«Физико-математические науки», 2020, 24:1, 116–136
16. Nash J. Le probleme de Cauchy pour les equation differentielles d'un fluid general. - Bull. Soc. Math. France., 1962, v.90, 487-497
17. Вольперт А.И., Худяев С.И. О задаче Коши для составных систем нелинейных дифференциальных уравнений. Матем. сб., 1972, т.87, 504–528.
18. Солонников В.А. О разрешимости начально-краевой задачи для уравнения движения вязкой сжимаемой жидкости. - В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 6, Л.: Наука, 1976, с.128–142. (Зап. научн. семинаров. Ленингр. , отд-ния Мат. ис-та АН ССР, т.56)
19. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. - Новосибирск: Наука, 1983. 319 с.
20. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978
21. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задачи газовой динамики. М.: Наука, 1980
22. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981
23. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982
24. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991
25. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. 47, №3. 271-306

26. Шокин Ю.И., Яненко Н.Н. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1985
27. Кузнецов Б.Г., Смагулов Ш. О сходящихся разностных схемах для уравнений вязкого газа. Новосибирск, 1982. Препринт №17.
28. Смагулов Ш. О сходящихся разностных схемах для уравнений вязкого теплопроводного газа // ДАН СССР, 1984, Т 275, №1, С. 31-34
29. Амосов А.А., Злотник А.А. Разностная схема для уравнений движения вязкого теплопроводного газа, ее Свойства и оценки погрешности ``в целом'' // ДАН СССР, 1985, Том 284, №2, 265-269
30. Абрашин В. Н. О разностных схемах газовой динамики // Дифференц. ур-ния. 1981. Т.17.№4.С.710-718
31. Ляшко А.Д., Федоров Е.М. О корректности нелинейных двухслойных операторно-разностных схем // Дифференциальные уравнения. 1981. 17. №7. 1304-1316
32. Волков К.Н. Разностные схемы расчета потоков повышенной разрешающей способности и их применение для решения задач газовой динамики // Вычислительнве методы и программирование. 2005. Т.6. С.146-167.
33. Попов А.В., Жуков К.А. Неявная разностная схема для нестационарного движения вязкого баротропного газа // Вычислительные методы и программирование. 2013. Т.14. С.516-623
34. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970 288 с.
35. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А. Моделирование работы газлифтной скважины. Доклад НАН Азерб., №4,2008, с. 107-116.
36. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. «Задачи управления газлифтным процессом при минимальных потерях дебита в подъемнике» // Институт Прикладной Математики 2013, с.111-119.
37. Алиев Ф.А., Есадуллаев Р., Исмаилов Н.А., “Алгоритм решения цифровой минимаксной задачи определения оптимального режима газлифта”//труды института прикладной математики Т.1 №1 2012 – С. 4-14.

References

1. F.A. Aliev, M.A. Dzhamalbekov, N.A. Veliev, I.R. Gasanov, N.A. Alizade. Algoritmy dlya komp'yuternogo modelirovaniya processa ekspluatacii neftyanyh skvazhin shtangovymi nasosami v sisteme skvazhina-plast / ISSN0032–8243. Prikl. mekhanika, 2019, Tom 55, No 3
2. Trubavin S.N., Ul'yanov V.V., Kibirev E.A. Rezul'taty provedeniya OPI po optimizacii gazliftnoj ekspluatacii skvazhin na Orenburgskom NGKM // Ekspoziciya Neft' Gaz. – 2017. – № 5. – С. 36-39.
3. Ulyanov V.V., Kuchurin A.S., Kibirev E.A. Implementation of the Intellectual Gas Control System for Gas Lift Optimization at Orenburgskoe Oilfield // 2018. SPE paper 191533-18RPTC-MS
4. Develop optimum gas lift methods to improve gas lift efficiency using gas lift pack-off, deep gas lift, and deep lift set / N. Lashari [et al.] // International Journal of Advanced Research in Engineering and Technology (IJARET). - 2020. - November. - V. 11. - Issue 11. - R. 1096-1114.
5. Minhanov, S. A. Dolgih, M. A. Varfolomeev, Razrabotka neftyanyh i gazovyh mestorozhdenij. ucheb. posobie dlya vuzov / Kazanskij federal'nyj universitet. – Kazan', 2019. – 96s.
6. Ngia T.T., Veliev M.M. Gazliftnaya ekspluataciya skvazhin. – SPb.: Nedra, 2016. – 384 s.
7. Istoricheskie aspekty vnedreniya beskompressornogo gazlifta v SP «V'etsovpetro» / T.T. Ngia, M.M. Veliev, V.A. Bondarenko [i dr.] // Neftyanoe hozyajstvo. – 2018. – № 6. – S. 127–131.
8. Arbuzov, V. N. Geologiya. Tekhnologiya dobychi nefti i gaza. Praktikum / V.N. Arbuzov, E.V. Kurganova. - M.: YUrajt, 2020. - 705 c.
9. Vadeckij, YU. V. Burenie neftyanyh i gazovyh skvazhin / YU.V. Vadeckij. - M.: Akademiya, 2020. - 352 c.
10. Temirbekov N.M., Turarov A.K. CHislennoe reshenie dinamicheskoj modeli gazliftnogo processa. Vestnik KazNITU, - 2016 g., №6 (118), – S. 338-344.
11. Kupreenko A.I., Isaev H.M., Mihajlichenko S.M. Gidrogazodinamika. Primery resheniya zadach. — Bryansk: Izd-vo Bryanskij gosudarstvennyj agrarnyj universitet, 2020. — 48 s.
12. Petrov, A.G. Analiticheskaya gidrodinamika: Ideal'naya neszhimaemaya zhidkost' / A.G. Petrov. - M.: Lenand, 2017. - 368 c.
13. Pavlovskij, V.A. Vychislitel'naya gidrodinamika. Teoreticheskie osnovy: Uchebnoe posobie / V.A. Pavlovskij, D.V. Nikushchenko. - SPb.: Lan', 2018. - 368 c.
14. Bubnov, V.A. Gidrodinamika: Mekhanika chasticy zhidkosti / V.A. Bubnov. - M.: Lenand, 2018. - 304 c.

15. R. V. ZHalnin, V. F. Masyagin, E. E. Peskova, V. F. Tishkin Apriornye ocenki lokal'nogo razryvnogo metoda Galerkina naraznesennyh setkah dlya resheniya uravneniya parabolicheskogo tipa vramkah odnorodnoj zadachi Dirihle // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya«Fiziko-matematicheskie nauki», 2020, 24:1, 116–136
16. Nash J. Le probleme de Cauchy pour les equation differentielles d'un fluid general. - Bull. Soc. Math. France., 1962, v.90, 487-497
17. Vol'pert A.I., Hudyaev S.I. O zadache Koshi dlya sostavnyh sistem nelinejnyh differencial'nyh uravnenij. Matem. sb., 1972, t.87, 504–528.
18. Solonnikov V.A. O razreshimosti nachal'no-kraevoj zadachi dlya uravneniya dvizheniya vyazkoj szhimaemoj zhidkosti. - V kn.: Issledovaniya po linejnym operatoram i teorii funkcij. 6, L.: Nauka, 1976, s.128–142. (Zap. nauchn. seminarov. Leningr. , otd-niya Mat. is-ta AN SSR, t.56)
19. Antoncev S.N., Kazhihov A.V., Monahov V.N. Kraevye zadachi mekhaniki neodnorodnyh zhidkostej. - Novosibirsk: Nauka, 1983. 319s.
20. Rozhdestvenskij B.L., YAnenko N.N. Sistemy kvazilinejnyh uravnenij i ih prilozheniya k gazovoj dinamike. M.: Nauka, 1978
21. Samarskij A.A., Popov YU.P. Raznostnye metody resheniya zadachi gazovoj dinamiki. M.: Nauka, 1980
22. Kovenya V.M., YAnenko N.N. Metod rasshchepleniya v zadachah gazovoj dinamiki. Novosibirsk: Nauka, 1981
23. Belocerkovskij O.M., Davydov YU.M. Metod krupnyh chastic v gazovoj dinamike. M.: Nauka, 1982
24. Fletcher K. Vychislitel'nye metody v dinamike zhidkostej. M.: Mir, 1991
25. Godunov S.K. Raznostnyj metod chislennogo rascheta razryvnyh reshenij uravnenij gidrodinamiki // Matematicheskij sbornik. 1959. 47, №3. 271-306
26. SHokin YU.I., YAnenko N.N. Metod differencial'nogo priblizheniya. Primenenie k gazovoj dinamike. Novosibirsk: Nauka, 1985
27. Kuznecov B.G., Smagulov SH. O skhodyashchihsya raznostnyh skhemah dlya uravnenij vyazkogo gaza. Novosibirsk, 1982. Preprint №17.
28. Smagulov SH. O skhodyashchihsya raznostnyh skhemah dlya uravnenij vyazkogo teploprovodnogo gaza // DAN SSSR, 1984, T 275, №1, S. 31-34
29. Amosov A.A., Zlotnik A.A. Raznostnaya skhema dlya uravnenij dvizheniya vyazkogo teploprovodnogo gaza, ee Svojstva i ocenki pogreshnosti ``v celom'' // DAN SSSR, 1985, Tom 284, №2, 265-269
30. Abrashin V. N. O raznostnyh skhemah gazovoj dinamiki // Differenc. ur-niya. 1981. T.17.№4.S.710-718
31. Lyashko A.D., Fedorov E.M. O korrektnosti nelinejnyh dvuhslojnyh operatorno-raznostnyh skhem // Differencial'nye uravneniya. 1981. 17. №7. 1304-1316
32. Volkov K.N. Raznostnye skhemy rascheta potokov povyshennoj razreshayushchej sposobnosti i ih primenenie dlya resheniya zadach gazovoj dinamiki // Vychislitel'nve metody i programmirovanie. 2005. T.6. S.146-167.
33. Popov A.V., ZHukov K.A. Neyavnaya raznostnaya skhema dlya nestacionarnogo dvizheniya vyazkogo barotropnogo gaza // Vychislitel'nye metody i programmirovanie. 2013. T.14. S.516-623
34. Ladyzhenskaya O.A. Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoj neszhimaemoj zhidkosti. – M.: Nauka, 1970 288 s.
35. Aliev F.A., Il'yasov M.H., Dzhamalbekov M.A. Modelirovanie raboty gazliftnoj skvazhiny. Doklad NAN Azerb., №4,2008, s. 107-116.
36. Aliev F.A., Ismailov N.A., "Zadachi upravleniya gazliftnym processom pri minimal'nyh poteryah debita v pod"emnike"//Institut Prikladnoj Matematiki 2013, s.111-119.
37. Aliev F.A., Esadullaev R., Ismailov N.A., "Algoritm resheniya cifrovoj minimaksnoj zadachi opredeleniya optimal'nogo rezhima gazlifta"//trudy instituta prikladnoj matematiki T.1 №1 2012 – S. 4-14.