ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ
И ТЕХНОЛОГИИ

МАТЕМАТИКА
МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

DOI 10.51885/1561-4212_2023_2_167
МҒТАА 27.29.21

Ж.Т. Рахметуллина[1], Қ.Қ. Солтанбекова[2], И.М. Увалиева[3]
Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті, Өскемен қ., Қазақстан
[1]*E-mail: zhrakhmetullina@ektu.kz*
[2]*E-mail: kymbat.soltanbekova@bk.ru**
[3]*E-mail: IUvalieva@mail.ru*

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЕШУДІҢ ОПЕРАТОРЛЫҚ ӘДІСТЕРІН ШОЛУ

ОБЗОР ОПЕРАТОРНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

REVIEW OF OPERATOR METHODS FOR SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS

Аңдатпа. *Мақалада диференциалдық теңдеулерді шешудің операторлық әдістерін шолу барысында Хевисайд операторы, жергілікті d-операторы, сызықтық дифференциалдық операторы, бүтін емес ретті дифференциалдық теңдеулердің операторлық шешімі қарастырылды. Операторлық әдіс сызықтық дифференциалдық теңдеулерді шешуге өте ыңғайлы екендігін және бұл әдісті қолдана отырып көптеген практикалық мәселелерін шешуге болатындығы айтылады. Қарапайым дифференциалдық теңдеулер мен жартылай дифференциалдық теңдеулерді шешуді жеңілдетуге көмектесетін Хевисайд операторлық әдісі екені және D операторының өрнегі кеңейтілген түрде жеткілікті көлемде жазылатындығы, бірақ қарастырылып отырған жағдайлардың туындылары мен интегралдары бір теңдікте жазылса, оны шағын түрде білдіруге болатындығы көрсетілген. Сызықтық дифференциалдық оператордың қысқаша қасиеттері туралы жазылған және бүтін емес ретті дифференциалдық теңдеудің оператор әдісімен табылған шешімі ұсынылған.*

Түйін сөздер: *диференциалдық теңдеу, операторлық әдіс, Хевисайд операторы, сызықтық дифференциалдық оператор, d-оператор, бүтін емес ретті дифференциалдық теңдеудің шешімі.*

Аннотация. *В статье в ходе обзора операторных методов решения дифференциальных уравнений рассмотрены оператор Хевисайда, локальный d-оператор, линейный дифференциальный оператор, операторное решение дифференциальных уравнений нецелого порядка. Утверждается, что операторный метод идеально подходит для решения линейных дифференциальных уравнений и что с помощью этого метода можно решить множество практических задач. Показано, что это операторный метод Хевисайда, который помогает упростить решение обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, и что выражение оператора D записывается в расширенном виде в достаточном объеме, но производные и интегралы рассматриваемых случаев могут быть выражены в небольшом виде, если они записаны в одном равенстве. Написано о кратких свойствах линейного дифференциального оператора и представлено решение дифференциального уравнения нецелого порядка, найденное методом оператора.*

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, операторный метод, оператор Хевисайда, линейный дифференциальный оператор, D-оператор, решение дифференциального уравнения нецелого порядка.*

Abstract. *In the article, during the review of operator methods for solving differential equations, the Heaviside operator, the local d-operator, the linear differential operator, and the operator solution of differential equations of non-integer order are considered. It is argued that the operator method is ideally suited for solving linear differential equations and that many practical problems can be solved using this method. It is shown that this is the Heaviside operator method, which helps to simplify the solution of ordinary differential equationфs and partial differential equations, and that the expression of the operator D is written in an expanded form in sufficient volume, but the derivatives and integrals of the cases under consideration can be expressed in a small form if they are written in one* *equality.. It is written about the brief properties of a linear differential operator and the solution of a non-integer differential equation found by the operator method is presented.*

Keywords: *differential equation, operator method, Heaviside operator, linear differential operator, D-operator, solution of a differential equation of non-integer order.*

Кіріспе. Шолудың мақсаты – диференциалдық теңдеулерді шешудің операторлық әдістерін түсіндіру және олардың тиімділігін анықтау.

Табиғат құбылыстарын зерттегенде, физика және техника, химия және биология мәселелерін шешкенде, эволюциялық процесті анықтайтын шамалар арасындағы тәуелділік, көбіне, шамалар мен олардың өзгеру жылдамдықтары арасындағы байланыс түрінде, яғни белгісіз функциялар мен туындыларын (дифференциалдарын) байланыстыратын теңдеу ретінде алынады. Белгісіз функция және оның туындыларын байланыстыратын мұндай теңдеулер дифференциалдық деп аталады [1].

Дифференциалдық оператор – кейбір дифференциалдық өрнектермен анықталған және дифференциалданатын коллекторлардағы немесе осы типтегі кеңістіктерге біріктірілген кеңістіктердегі (жалпы айтқанда, векторлық) функциялардың (немесе дифференциалданатын стратификациялардың қималары) кеңістіктерінде әрекет ететін оператор.

Жеке шешімдерді құрудың операторлық әдісін С. Ли [2] енгізген еді, кейін ол операторлық қатарларды ұсынады. Бұл қатарлар қарапайым дифференциалдық теңдеу жүйелерінің Коши есептерін шешуде өте пайдалы болды. Содан кейін әртүрлі авторлар қатарлар теориясын және олардың қолданылуын, атап айтқанда, ішінара туындылардағы дифференциалдық теңдеулерді шешу үшін дамытты. Әдебиетте ең жақсы түсіндірілген үш тәсіл бар. Біріншісі Б.А. Бондаренконың [3] жұмысымен байланысты. Ол сызықтық және көп сызықты теңдеулер шешімдерінің операторлық көріністерін қатар түрінде емес, соңғы сомалар түрінде, яғни полилинарлы функциялар түрінде анықтауды енгізді. А.Ф. Сидоров [4] мектебінің осы зерттеулері мен тәсілдерін В.Н. Фролов пен Ю.Л. Спиваков [5] жұмыстары жалғастырады. Бұл жұмыстарда бастапқы дифференциалдық теңдеудің шешімі қайталанатын қатынастардан қатардың коэффициенттерін анықтауға мүмкіндік беретін арнайы конструкциялы операторлық қатарлары түрінде ұсынылады. Үшінші әдіс-символдық әдіспен біріктірілген бастапқы функциялар әдісі. Серпімділік теориясының кеңістіктік мәселесін шешу үшін В.З. Власов және А.И. Лурье [6] бастапқы функциялар әдісін ұсынған еді. Бастапқы әдістің қолайсыздығын болдырмау үшін символдық әдіс қолданылады. Бұл әдіс оператор қатарлары символдық түрде қарапайым функциялар түрінде жазылуымен сипатталады, олардың аргументтері операторлар болып табылады. Бұл әдістерге Э.М. Карташовтың [7] әдісін жатқызуға болады. Ол әдіс қозғалмалы шекарасы бар аймақтағы жылу өткізгіштік мәселелерін шешу үшін ұсынылған және оны дифференциалды қатарлар әдісі деп атуға болады.

«Хевисайд математикалық аппараты» мақаласында Хевисайд қарапайым дифференциалдық теңдеулер мен жартылай дифференциалдық теңдеулерді шешуді жеңілдетуге көмектесетін әдіс жасағандығы және оны теңдесі жоқ жинақы дифференциалдық теңдеулерін шешудің практикалық әдісін алу үшін жасағаны айтылады. Хевисайдтың символдық әдісі негізінде қарапайым және жартылай туындылардағы сызықтық дифференциалдық теңдеулерді шешудің операторлық әдісі жасалған және әдіс экспоненттің қасиеттері мен факторизациясына негізделген.

«Бөлшек талдау үшін ақырлы нақты ретті саралау және интегралдаудың жергілікті d-операторы» мақаласында стандартты талдауды саралау және интеграциялау операцияларын жалпылау болып табылатын кез келген ақырлы нақты ретті саралау және интеграциялау үшін жергілікті d операторы енгізілетіндігі, бөлшек талдау d операторының негізінде құру мүмкіндігі талқыланады, бүтін емес және бүтін реттік d оператордың ерекше жағдайлары алынады.

«Дифференциалдық теңдеулер» оқулығында сызықтық дифференциалдық оператордың қасиеттері туралы және L – сызықтық n ретті дифференциалдық операторын енгізу арқылы теңдеуді қысқаша түрінде жазуға болатындығы жазылған. Сызықтық дифференциалдық оператордың негізгі қасиеттері көрсетіледі.

«Бүтін емес ретті дифференциалдық теңдеулердің, Блэк–Шоулз теңдеулерінің және жылу өткізгіштігінің операторлық шешімі» мақаласында бүтін емес ретті дифференциалдық теңдеудің оператор әдісімен Эрмит пен Лагерр көпмүшелерінің жалпыланған формалары қолданып табылған шешімі ұсынылған. Оператор әдісі арқылы қарапайым дифференциалдық теңдеулерді және т.б. ішінара туындылардағы теңдеулердің кеңейтілген формаларын шешу мысалы келтірілген.

Операторлық әдістердің дифференциалдық теңдеулерді шешуге өте ыңғайлы екендігін және бұл әдістерді қолдана отырып көптеген практикалық мәселелерін шешуге болатындығын көрсетілген.

Дифференциалдық теңдеулерді операторлық әдістермен шешудің тиімділігін анықтау барысында жоғарыда айтылған мақалаларда келесі операторлық әдістер қарастырылады:

1. Хевисайд математикалық аппараты;
2. Жергілікті d-операторы;
3. Сызықтық дифференциалдық оператор;
4. Бүтін емес ретті дифференциалдық теңдеулердің операторлық шешімі.

Материалдар және зерттеу әдістері.

А.М. Залалетдинов пен М.Л. Камидуллиннің «Хевисайд математикалық аппараты» мақаласында Хевисайд ұсынған символдық әдіс сызықтық дифференциалдық теңдеулерді шешуге өте ыңғайлы екендігін және бұл әдісті қолдана отырып, физика, жылу техникасы, математикалық физика, электротехника, телеграф және телефонның көптеген практикалық мәселелерін шешуге болатындығын айтады [8].

Хевисайд қарапайым дифференциалдық теңдеулер мен жартылай дифференциалдық теңдеулерді шешуді жеңілдетуге көмектесетін әдіс жасады. Дифференциалдау операторын көрсету үшін ол P таңбасын және интегралдау операторын көрсету үшін P-1 қолданды. Егер x функциясы t болған кездегі теңдеудің әділ болатын шарттарын көрсетеді. Бұл Хевисайт әдісі оны теңдесі жоқ жинақы дифференциалдық теңдеулерін шешудің практикалық әдісін алу үшін жасады [9].

Дифференциалдық теңдеулерді шешу үшін Хевисайд оларды алгебралық теңдеуге айналдырды. Содан кейін енгізілген оператордың функциясы ретінде қажетті шаманы тауып, ρ өрнектің төмендеу дәрежелері бойынша қатарға қойып, ауыстыруларды енгізді. Ауыстыруларды енгізгеннен кейін n-еселік интеграция кері факторлық функциямен ауыстырылды Осыдан келесі теңдеу (1) шығады [10]:

$$c=\frac{e}{R[1-[1-\frac{t}{\tau}+\frac{1}{2!\left(\frac{t}{\tau}\right)^{2}}-\frac{1}{3!\left(\frac{t}{\tau}\right)^{3}}+\ldots]]} \tag{1}$$

Бұл теңдеуді шешудің негізі-қуат қатарларын қолдана отырып, антивирустық функция қатарына сәйкес ыдырау табылған кезде ғана операциялық теңдеуді нақты шешімге айналдыруға болады. Бұл әдістің тағы бір артықшылығы – бастапқы шарттарды ескермеуге болады.

Барлық артықшылықтарға қарамастан, бұл әдістің кемшіліктері де бар. Ең үлкені мынада: егер қатарда көптеген мүшелер болса, онда сандық есептеулер жүргізу қиын, яғни қатардың қосындысын біртіндеп анықтау мүмкін емес.

Сондай-ақ, Хевисайд бірлік және импульстік функцияларды енгізді. Ол бірлік функцияны уақыт функциясының ерекше жағдайы ретінде қарастырды, оны 1 немесе h, p арқылы белгіледі [11]. Бұл функция үзілісті болып табылады және де оны келесі түрде ұсынды:

n=1 кезінде (2):

$$\frac{1}{p*1} = 1*t \tag{2}$$

n=2 кезінде (3):

$$\frac{1}{p^2*1} = 1*\frac{t^2}{2!} \tag{3}$$

Ол (4) қатынасынан (5) қатынасының қалай шыққанын көрсетті:

$$\frac{1}{p+a}*1 = \frac{1}{a}*[1-E^{-at}] \tag{4}$$

$$\frac{1}{p+a}*1 = \frac{p+a-a}{p+a}*1 = 1-[1-E^{-at}] = E^{-at} \tag{5}$$

Кабельдің екі ұшынан барлық шағылысқан толқындарды қосқаннан кейін ол осы нәтижеге қол жеткізді. Теңдеуді алгебралау үшін бұл теңдеуге Хевисайд қарапайым бөлшектерге бөлді немесе ыдырау теоремасы деп аталатын теореманы қолданды. Бұл тұжырымдады: e=£C электромагниттік мәселенің операциялық шешімі болсын, мысал әдісті ол келесідейы, сенімділік үшін, бұл c сыртқы нүктеге байланысты белгілі бір шартталған e нүктеде ток бар.

C формасы – c үшін нақты шешімнің бар екендігін көрсететін түрі . T=0 болған сәтте e тұрақты болып табылады, содан кейін c арқылы e-ні келесідей анықтауға болады (6):

$$C = \frac{e}{z_0} + e\sum \frac{e^{pt}}{p^{\frac{dz}{dp}}} \tag{6}$$

Хевисайд £ операциялық теңдеуде оператор, ал p уақытша дифференциатор болып табылады; белгілі бастапқы шарттармен және тұрақты мәнмен e, e/£0 тұрақты ток болып табылады және (формула) уақыт бойынша өзгеретін бос токтар түбірлердің нақты немесе күрделі болуына байланысты деп түсіндіреді [8-11].

Осылайша, «Хевисайд математикалық аппараты» мақаласында О. Хевисайд әзірлеген операциялық есептеу сызықтық дифференциалдық теңдеулерді шешудің ашық әдісі болып табылатындығын көрсетеді.

Жергілікті d-операторы бойынша В.А. Чуриковтың «Бөлшек талдау үшін ақырлы нақты ретті саралау және интегралдаудың жергілікті d-операторы» мақаласында стандартты талдауды саралау және интеграциялау операцияларын жалпылау болып табылатын кез-келген ақырлы нақты ретті саралау және интеграциялау үшін жергілікті d операторы енгізілетіндігі, бөлшек талдау d операторының негізінде құру мүмкіндігі талқыланады, бүтін емес және бүтін реттік d оператордың ерекше жағдайлары алынды [12]:

$$\begin{cases} d^{-s}x : x^{q} = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-s+1)} x^{q-s}; q \neq -1,-2,-3....; \\ d^{s}x : x^{q} = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+s+1)} x^{q+s} + C_{s}(x); \\ \begin{cases} q \neq -1,-2,-3,...;s \notin \mathrm{N}; \\ q = -1,-2,-3,...;s \in \mathrm{N}; s < |q|; \end{cases} \\ d^{-s}x : x^{-n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(-s-n+1)} x^{-n-s}; \\ n \in \mathrm{N}; s \neq 0,1,2,3,...; \\ d^{s}x : x^{-n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(s-n+1)} x^{-n+s} + C_{s}(x); \\ n \in \mathrm{N}; s \neq 0,1,2,3,...; \\ d^{1}x : x^{-1} = ln|x| + C_{1}; C_{1} = const \end{cases} \quad (7)$$

$d^{\pm s}x$ операторы $x^{q}, s, x, q \in R$; $|s|,|q| = const < \infty$ көптеген дәрежелік функцияларының жиынтығында әрекет ететін $s \geq 0$ бөлшек ретті дифференциалдау және интегралдаудың *d*-операторы деп аталады. Мұнда $C_s(x)$ және C_1 сәйкесінше s және 1 бөлшек ретті интегралдау көпмүшелері болып табылады. S реттік интегралдау көпмүшесінен s реттік туынды нөлге тең, $d^{-s}x : C_{s}(x) = 0$.

D-операторындағы (1) теңдік (7) оператор коэффициентінің алымында гамма функциясының полюстері болмаған кезде s ≤ 0 ретінің бөлшек дифференциациясын анықтайды. Қосымша шарттар дифференциациялдау жағдайларын (3) теңдікте ескерілген «полюстерде». жоққа шығарады (2) теңдік s ≥ 0 ретінің бөлшек интегралдауын анықтайды, полюстер болмаған кезде гамма функциясы оператор коэффициентінің алымында. Бұл теңдіктегі алғашқы қосымша шарттар (4) теңдік ескеретін полюстердегі" интегралдау жағдайларын болдырмайды. Екінші қосымша шарттар логарифмдік жағдай-ларда интеграцияны болдырмайды. (3)-(4) дәрежелік функциялардың көрсеткіштері теріс бүтін мәндерге ие болған кезде "полюстерде" дифференциация мен интеграцияны анықтайды. (5) теңдік стандартты талдаудағыдай логарифмдік жағдайда интеграцияны анықтайды [13].

D операторының (7) өрнегі кеңейтілген түрде жазылады және жеткілікті көлемді, бірақ егер қарастырылып отырған жағдайлардың туындылары мен интегралдары бір теңдікте жазылса, оны шағын түрде білдіруге болады.

$$\begin{cases} d^{\pm s}x : x^{q} = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q \pm s+1)} x^{q\pm s} + C_{s}(x); \\ \begin{cases} q \neq -1,-2,-3,...;s \leq 0; \\ q \neq -1,-2,-3,...;s \notin \mathrm{N}; \\ q = -1,-2,-3,...;s \in \mathrm{N}; s < |q|; \end{cases} \\ d^{\pm s}x : x^{-n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(\pm s-n+1)} x^{-n\pm s} + C_{s}(x); \\ n \in \mathrm{N}; s \neq 0,1,2,3,...; \\ d^{1}x : x^{-1} = ln|x| + C_{1}; C_{1} = const; \\ C_{0}(x) = C_{-s}(x) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Берілген d-оператор көрінісіндегі соңғысы, төртінші теңдік дифференциалдау операциясы үшін интегралдау көпмүшелері (s реттер) және нөлдік реттік жағдайда (бірлік операторы) әрқашан нөлге тең болатындығын анық көрсетеді.

Ұсынылған d-оператор-бұл (7) теңдіктердің (1) теңдік пен (2) теңдікке сәйкес келетін, бірақ дәрежелік функциялардың көрсеткіштері мен саралау мен интеграциялау тәртібіне қойылған осы теңдіктердегі қосымша шарттарды ескермей, айтарлықтай түрлендірілген Адамар операторы (7). Адамар операторында оператор коэффициентінің алымында гамма функциясының полюсі болған кезде немесе логарифмдік жағдайлар ескерілмеген кезде саралау және интегралдау мүмкіндігі жоқ. Бұл Адамар операторының негізінде сәйкестік принципін қанағаттандыратын толыққанды бөлшек талдау жасауға мүмкіндік бермейді [14].

D-оператордың бұл нұсқасында дәрежелік функцияларын саралау мен интегралдаудың барлық ерекше жағдайлары ескерілген. Егер бөлгіште гамма-функцияларда полюстер алымдағы полюстермен бір уақытта пайда болмаса, d-оператор коэффициенттерінің алымдарындағы гамма-функциялардағы пайда болатын полюстер тиісті полюстердегі шегерімдермен ауыстырылады. Интегралдау кезінде логарифмдік жағдайлардың барлық мүмкін нұсқалары да ескеріледі.

Логарифмдік жағдайларды есепке алу және d-операторындағы коэффициент алымдарында полюстердің болмауы оны толық жергілікті бөлшек талдауды жүйелі және дәйекті құру үшін Адамар операторына қарағанда едәуір тартымды етеді. Сонымен қатар, d-операторы үшін сәйкестік принципі орындалады, оған сәйкес дифференциалдау және интегралдау реттері 1 болған жағдайда d-операторы стандартты талдаудың интегралдау және саралау операторларын береді.

D операторының ең маңызды екі жағдайын қарастырылған (7). D операторының (7) интегралды дифференциациясының бүтін және бүтін емес реттері сапалық жағынан әртүрлі салдарға әкеледі, сондықтан d операторының осы жағдайларын бөлек қарастырған жөн.

Егер d-операторында (7) бөлшек дифференциалдау және бөлшек интегралдау реттері әрқашан бүтін емес болса, онда дәреженің теріс бүтін реттерін интегралдау кезінде пайда болатын логарифмдік жағдайлар мүлдем жоқ ((7) - дегі бесінші теңдік). Логарифмдік жағдайларды қарастырудан алып тастай отырып, d-оператор үшін қарапайым өрнегі алынады, оны d бүтін емес реттік оператор деп аталады. D операторының (7) үшінші және төртінші теңдіктері тек бүтін емес реттер үшін дифференциация мен интеграцияны анықтайды, сондықтан бүтін реттер үшін олар мағынасын жоғалтады. Бүтін реттердің барлық мүмкін туындылары мен анықталмаған интегралдары бірінші, екінші және бесінші теңдіктермен анықталады (7). Нәтижесінде d операторының ерекше жағдайын жазуға болады, оны d бүтін реттік оператор деп аталады.

Сызықтық дифференциалдық оператор арқылы есепті шешудің мысалдары К. Д. Көлекеев пен К. Ж.Назарованың [1] еңбектерінде зерттелген. Егер L - сызықтық n ретті дифференциалдық операторын енгізілсе, теңдеуді қысқаша $L[y]=f(x)$ түрінде жазуға болады: мұндағы,

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y \tag{8}$$

Сызықтық дифференциалдық оператордың негізгі екі қасиеті бар:

1) тұрақты көбейткіш сызықтық оператор таңбасының сыртына шығарылады:

$$L[Cy] \equiv CL[y] \tag{9}$$

2) Оператордың $y_1(x)$ және $y_2(x)$ функцияларының қосындысына әсері, бұл

функцияларға жеке-жеке әсерлерінің қосындысына тең:

$$L[y_1+y_2]\equiv L[y_1]+L[y_2] \qquad (10)$$

Оператордың 1) және 2) қасиеттерінен келесі теңдік алынады:

$$L[\sum_{i=1}^{m}C_i y_i]\equiv \sum_{i=1}^{m}C_i L[y_i] \qquad (11)$$

Бүтін емес ретті дифференциалдық теңдеулердің операторлық шешімі К.В. Жуковскийдің «Бүтін емес ретті дифференциалдық теңдеулердің, Блэк–Шоулз теңдеулерінің және жылу өткізгіштігінің операторлық шешімі» атты мақаласында дифференциалдық теңдеулердің операторлық шешімдері бүтін емес ретті туындыларда және Блэк–Шоулз типті теңдеулерде және Фурье жылу өткізгіштігінде ұсынылған [15]. Оларды шешу үшін кері дифференциалдық операторлар, интегралды түрлендірулер және бірнеше айнымалылар мен индекстері бар Эрмит пен Лагерра көпмүшелерінің жалпыланған формалары қолданылады [16]. Оператор әдісі арқылы қарапайым дифференциалдық теңдеулерді және Фурье, Шредингер, Блэк–Шоулз және т.б. ішінара туындылардағы теңдеулердің кеңейтілген формаларын шешу мысалдары келтірілген [17].

Дифференциалдық теңдеулерді зерттеу және шешу өзі маңызды математикалық есепті ұсынады, өйткені олар физикалық процестердің кең ауқымын сипаттайды. Компьютерлік әдістерді қолдану дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін алуды едәуір жеңілдетті, ал соңғы жылдары есептеу техникасы мен аналитикалық есептеу бағдарламаларының қарқынды дамуы бұл тапсырманы көбіне автоматтандырды.

Кейбір сызықтық емес артта қалған дифференциалдық теңдеулердің шамамен шешімдерін алу биологиялық модельдерге қатысты. Осы соңғы зерттеулердің барлығы аналитикалық шешімдерді мүмкіндігінше сандық санау арқылы алу олардың мағынасын терең зерттеуге және түсінуге мүмкіндік беретіндіктен ғана емес, сонымен қатар күнделікті есептеу жұмыстарының едәуір аз болуына және көбінесе аз уақыт жұмсауға байланысты екенін тағы бір рет көрсетеді. Бұл жұмыста автор жасаған дифференциалдық теңдеулерді шешудің операторлық техникасы бүтін емес тәртіптің әдеттегі дифференциалдық теңдеулеріне және Блэк–Шоулз теңдеулерін жалпылауға қолданылады.

Гетерогенді дифференциалдық теңдеулердің шешімдері әдетте жасыл функцияның көмегімен құрылады. Бұған балама мүмкіндік кері туынды оператордың көмегімен жақында кеңінен зерттелген бүтін емес ретті дифференциалдық теңдеулердің мысалында ұсынылады:

$$(\beta^2-(D+\alpha)^2F(x)=f(x),D+\alpha\equiv\breve{D} \qquad (12)$$

мұндағы D = dx-x туындысы, γ-ерікті нақты және міндетті түрде бүтін параметр емес, α және β — тұрақтылар. Кері дифференциалдық операторларды қолдана отырып f (x) = x ^{k} бастапқы шартымен(12) теңдеудің ішінара интегралын келесі түрде ұсынуға болады:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}\int_0^{\infty}t^{2(\nu-1)}exp(-(\beta\tau)^{2)}*\int_{-\infty}^{\infty}exp(-(\frac{\eta-x}{2\tau})^2+\alpha(\eta-x))f(\eta)d\eta d\tau \qquad (13)$$

(13) формуласында екі айнымалының Эрмит көпмүшелерін қолдана отырып, екі интегралды ажыратуға болатындығы ескеріліп, келесідей интегралдардың конвергенциясы (14) алынады:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\tau^{2(\nu-1)}exp(-\beta^2\tau^2)*H_n(\alpha-\frac{1}{4\tau^2})d\tau\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}(\eta-x)^n f(\eta)d\eta \qquad (14)$$

Осылайша, (12) теңдеудің шешімі $\phi(x) = \Phi(x) * f(\eta)$ конволюциясынан $\Phi(x) = x$ N ядросымен және Эрмит көпмүшелерімен берілген салмақпен (15) қатар түрінде ұсынылады:

$$
\begin{gathered}
F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\phi(x)C(\nu,\alpha,\beta)\\
\Phi(x-\eta)=(\eta-x)^n,\Phi(x)=(-x)^n\\
\phi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x-\eta)f(\eta)d\eta\equiv\Phi(x)*f(\eta)\\
C(\nu,\alpha,\beta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}\int_0^{\infty}\tau^{2(\nu-1)}\exp(-\beta^2\tau^2)*\frac{1}{n!}H_n(\alpha-\frac{1}{4\tau^2})d\tau
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Сонымен қатар, генерациялау функциясын ескере отырып, жоғарыда алынған конволюциядан және (13), (12) теңдеудің шешімі Гаусс типінің ықтималдық үлестірімінің ядросымен келесі конволюциядан салмақпен интегралмен беріледі, (16) тен Ω (x, τ):

$$
\begin{gathered}
F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}\int_0^{\infty}\tau^{2(\nu-1)}e^{-\beta^2\tau^2}\varpi(x,\tau)d\tau\\
\varpi(x,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\Omega(x-\eta,\tau)f(\eta)d\eta\equiv\Omega(x,\tau)*f(\eta)\\
\Omega(x-\eta,\tau)=exp(\alpha(\eta-x)-\frac{(\eta-x)^2}{4\tau^2})\\
\Omega(x,\tau)=exp(-\alpha x-(\frac{x}{2\tau})^2)
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Осыны ескере отырып,

$$
\int_0^{\infty}\tau^{2(\varpi-1)}e^{-(\beta\tau)^2-(x-\eta)^2/(4\tau^2)}d\tau=(\frac{|x-\nu|}{2\beta})^{\nu-1/2}K_{\nu-1/2}(\beta|x-\eta|)
\tag{17}
$$

Мұндағы K_n (x) - Макдональд функциясы, (17) тен (18) шешімі алынады:

$$
F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{|x-\nu|}{2\beta})^{\nu-1/2}K_{\nu-1/2}(\beta|x-\eta|)e^{\alpha(x-\eta)}f(\eta)d\eta
\tag{18}
$$

Осылайша, (12) өрнек бүтін емес ретті дифференциалдық теңдеудің шешімін оператор әдісімен келесідей (19) конволюция түріне келтіріледі:

$$
\begin{gathered}
F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}x*f\\
x=(\frac{|x|}{2\beta})^{\nu-1/2}K_{\nu-1/2}(\beta|x|)e^{-\alpha x}
\end{gathered}
\tag{19}
$$

Қорытынды. «Хевисайд математикалық аппараты» мақаласында Хевисайд қарапайым дифференциалдық теңдеулер мен жартылай дифференциалдық теңдеулерді шешуді жеңілдетуге көмектесетін әдіс жасағандығы және оны теңдесі жоқ жинақы дифференциалдық теңдеулерін шешудің практикалық әдісін алу үшін жасағаны айтылған. Хевисайд £ операциялық теңдеуде оператор, ал р уақытша дифференциатор болып табылады; белгілі бастапқы шарттармен және тұрақты мәнмен е, е/£0 тұрақты ток болып табылады және (формула) уақыт бойынша өзгеретін бос токтар түбірлердің нақты немесе күрделі болуына байланысты деп түсіндіреді. Осылайша, «Хевисайд математикалық аппараты» мақаласында О. Хевисайд әзірлеген операциялық есептеу сызықтық дифференциалдық теңдеулерді шешудің ашық әдісі болып табылатындығын көрсетеді.

«Бөлшек талдау үшін ақырлы нақты ретті саралау және интегралдаудың жергілікті d-операторы» мақаласында стандартты талдауды саралау және интеграциялау операцияларын жалпылау болып табылатын кез-келген ақырлы нақты ретті саралау және интеграциялау үшін жергілікті d операторы енгізілетіндігі, бөлшек талдау d операторының негізінде құру мүмкіндігі талқыланады, бүтін емес және бүтін реттік d оператордың ерекше жағдайлары алынды. D операторының қарастырылып отырған жағдайлардың туындылары мен интегралдары бір теңдікте жазылса, оны шағын түрде білдіруге болатындығы көрсетілген.

«Дифференциалдық теңдеулер» оқулығында сызықтық дифференциалдық оператордың қасиеттері туралы, және L - сызықтық n ретті дифференциалдық операторын енгізсек, теңдеуді қысқаша $L[y]=f(x)$ түрінде жазуға болатындығы жазылған. Сызықтық дифференциалдық оператордың келесідей негізгі екі қасиеті көрсетілген:

1) тұрақты көбейткіш сызықтық оператор таңбасының сыртына шығарылады;

2) оператордың $y_1(x)$ және $y_2(x)$ функцияларының қосындысына әсері, бұл функцияларға жеке-жеке әсерлерінің қосындысына тең.

«Бүтін емес ретті дифференциалдық теңдеулердің, Блэк-Шоулз теңдеулерінің және жылу өткізгіштігінің операторлық шешімі» мақаласында бүтін емес ретті дифференциалдық теңдеудің оператор әдісімен табылған шешімі ұсынылған. Оларды шешу үшін кері дифференциалдық операторлар, интегралды түрлендірулер және бірнеше айнымалылар мен индекстері бар Эрмит пен Лагерр көпмүшелерінің жалпыланған формалары қолданылады. Оператор әдісі арқылы қарапайым дифференциалдық теңдеулерді және т.б. ішінара туындылардағы теңдеулердің кеңейтілген формаларын шешу мысалы келтірілген. Автор жасаған дифференциалдық теңдеулерді шешудің операторлық техникасы бүтін емес тәртіптің әдеттегі дифференциалдық теңдеулеріне қолданылады.

Хевисайд операторы, жергілікті d-операторы, сызықтық дифференциалдық операторы, бүтін емес ретті дифференциалдық теңдеулердің операторлық шешімі туралы мақалаларда операторлық әдістер сызықтық дифференциалдық теңдеулерді шешуге өте ыңғайлы екендігін және бұл әдістерді қолдана отырып көптеген практикалық мәселелерін шешуге болатындығын анықталды.

Әдебиеттер тізімі

1. Көлекеев К. Д., Назарова К. Ж. Дифференциалдық теңдеулер: Оқулығы. – Алматы: ЖШС // РПБК “Дәуір”, 2012. - 216 бет.
2. Steinberg S. Lie series and nonlinear ordinary differential equations //Journal of mathematical analysis and applications. – 1984. – Т. 101. – №. 1. – С. 39-63.
3. Bondarenko B. A. Generalized Pascal triangles and pyramids: their fractals, graphs, and applications. – Santa Clara, CA : Fibonacci Association, 1993.
4. Sidorov A. F., Shapeev V. P., Ianenko N. N. The method of differential relations and its applications in gas dynamics //Novosibirsk Izdatel Nauka. – 1984.
5. Тимофеева И. и др. История кафедры математического анализа МПГУ в лицах и датах. – Litres, 2022.
6. Карпов В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. Часть 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. – Litres, 2022.
7. Карташов, Э. М. "RUSSIAN TECHNOLOGICAL JOURNAL." RUSSIAN TECHNOLOGICAL JOURNAL Учредители: МИРЭА-Российский технологический университет 10.1 (2022): 68-79.

8. Залалетдинов А. М., Камидуллин М. Л. Математический аппарат Хевисайда //XXIV Туполевские чтения (школа молодых ученых). – 2019. – С. 193-196
9. Valishin N.T. Variational principle and the problems dynamics // Life Science Journal. 2014,11(8), pp. 568-574
10. Valishin N.T. An Optical-Mechanical Analogy And The Problems Of The Trajectory-Wave Dynamics // Global Journal of Pure and Applied Mathematics. Volume 12, Number 4 (2016), pp. 2935-2951
11. Боголюбов А.Н. Хевисайд и возникновение операционного исчисления, В кн.: Штокало И.З. Операционное исчисление,-Киев:1972, с.18-22.
12. Чуриков В. А. Локальный d-оператор дифференцирования и интегрирования конечных вещественных порядков для дробного анализа //Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2011. – Т. 318. – №. 2.
13. Чуриков В.А. Дополнительные главы анализа. Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе d-оператора. – Томск: Изд-во ТПУ, 2010. – 118 с.
14. Чуриков В.А. Дробный анализ на основе оператора Адамара // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312. – № 2. – С. 16–20.
15. Жуковский К. В. Операторное решение дифференциальных уравнений с производными нецелого порядка, уравнений Блэка-Шоулза и теплопроводности //Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. – 2016. – №. 3. – С. 18-25
16. Сарра Б. Двусторонние оценки решений краевых задач для неявных дифференциальных уравнений //Вестник российских университетов. Математика. – 2021. – Т. 26. – №. 134. – С. 216-220.
17. Бенараб С., Жуковский Е. С., Мерчела В. “Теоремы о возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением”, Тр. ИММ УрО РАН, 25, № 4, 2019, 52–63. DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-4-52-63.

References

1. Kөlekeyev K. D., Nazarova K. ZH. Differentsialdyk̦ teңdeuler: Ok̦ulyġy. - Almaty: ZHSHS //RPBK “Dəuír”, 2012. - 216 bet.
2. Steinberg S. Lie series and nonlinear ordinary differential equations //Journal of mathematical analysis and applications. – 1984. – T. 101. – №. 1. – S. 39-63.
3. Bondarenko B.A. Generalized Pascal triangles and pyramids: their fractals, graphs, and applications. – Santa Clara, CA : Fibonacci Association, 1993.
4. Sidorov A. F., Shapeev V. P., Ianenko N. N. The method of differential relations and its applications in gas dynamics //Novosibirsk Izdatel Nauka. – 1984.
5. Timofeyeva I. i dr. Istoriya kafedry matematicheskogo analiza MPGU v litsakh i datakh. – Litres, 2022.
6. Karpov V. Prochnost' i ustoychivost' podkreplennykh obolochek vrashcheniya. Chast' 1. Modeli i algoritmy issledovaniya prochnosti i ustoychivosti podkreplennykh obolochek vrashcheniya. – Litres, 2022.
7. Kartashov, E.M. "RUSSIAN TECHNOLOGICAL JOURNAL." RUSSIAN TECHNOLOGICAL JOURNAL Uchrediteli: MIREA-Rossiyskiy tekhnologicheskiy universitet 10.1 (2022): 68-79.
8. Zalaletdinov A.M., Kamidullin M.L. Matematicheskiy apparat Khevisayda //XXIV Tupolevskiye chteniya (shkola molodykh uchenykh). – 2019. – S. 193-196
9. Valishin N.T. Variational principle and the problems dynamics // Life Science Journal. 2014,11(8), pp. 568-574
10. Valishin N.T. An Optical-Mechanical Analogy And The Problems Of The Trajectory-Wave Dynamics // Global Journal of Pure and Applied Mathematics. Volume 12, Number 4 (2016), pp. 2935-2951
11. Bogolyubov A.N. Khevisayd i vozniknoveniye operatsionnogo ischisleniya, V kn.: Shtokalo I.Z. Operatsionnoye ischisleniye,-Kiyev:1972, s.18-22.
12. Churikov V.A. Lokal'nyy d-operator differentsirovaniya i integrirovaniya konechnykh veshchestvennykh poryadkov dlya drobnogo analiza //Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesursov. – 2011. – T. 318. – №. 2.
13. Churikov V.A. Dopolnitel'nyye glavy analiza. Drobnoye integrirovaniye i drobnoye differentsirovaniye na osnove d-operatora. – Tomsk: Izd-vo TPU, 2010. – 118 s.
14. Churikov V.A. Drobnyy analiz na osnove operatora Adamara // Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. – 2008. – T. 312. – № 2. – S. 16–20.
15. Zhukovskiy K.V. Operatornoye resheniye differentsial'nykh uravneniy s proizvodnymi netselogo poryadka, uravneniy Bleka-Shoulza i teploprovodnosti //Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 3. Fizika. Astronomiya. – 2016. – №. 3. – S. 18-25
16. Sarra B. Dvustoronniye otsenki resheniy krayevykh zadach dlya neyavnykh differentsial'nykh uravneniy // Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika. – 2021. – T. 26. – №. 134. – S. 216-220.

17. Benarab S., Zhukovskiy Ye.S., Merchela V. "Teoremy o vozmushcheniyakh nakryvayushchikh otobrazheniy v prostranstvakh s rasstoyaniyem i v prostranstvakh s binarnym otnosheniyem", Tr. IMM UrO RAN, 25, № 4, 2019, 52-63. DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-4-52-63.