ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ
И ТЕХНОЛОГИИ

АВТОМАТТАНДЫРУ ЖӘНЕ БАСҚАРУ
АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ
AUTOMATION AND CONTROL

DOI 10.51885/1561-4212_2023_4_419
МҒТАА 28.15.19; 55.30.31

Г.К. Шадрин[1], Г.М. Назенова[2], Ә.Т. Құсайын-Мұрат[3], А.Л. Красавин[4], Д.Л. Алонцева[5]
Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті, Өскемен қ., Қазақстан
[1]*E-mail; shadrin.g.k@yandex.ru*
[2]*E-mail: g_nazenova@mail.ru**
[3]*E-mail: akussaynmurat@edu.ektu.kz*
[4]*E-mail: akrassvin@edu.ektu.kz*
[5]*E-mail: dalontseva@ektu.kz*

ЕКІ АЙНАЛМАЛЫ БАЙЛАНЫСЫ БАР ЖАЗЫҚ МАНИПУЛЯТОРДЫҢ ДИНАМИКАЛЫҚ ҚОЗҒАЛЫСЫН БАСҚАРУ ЖҮЙЕСІНІҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛІН ОБЪЕКТІНІҢ ДИНАМИКАСЫ МЕН БҰЗЫЛЫСТАРЫН ӨТЕУ ӘДІСІМЕН ӘЗІРЛЕУ

DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL OF THE CONTROL SYSTEM FOR THE DYNAMIC MOTION OF A FLAT MANIPULATOR WITH TWO ROTATIONAL LINKS BY THE METHOD OF COMPENSATING THE OBJECT DYNAMICS AND PERTURBATIONS

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМ ДВИЖЕНИЕМ ПЛОСКОГО МАНИПУЛЯТОРА С ДВУМЯ ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ ЗВЕНЬЯМИ МЕТОДОМ КОМПЕНСАЦИИ ДИНАМИКИ ОБЪЕКТА И ВОЗМУЩЕНИЙ

Аннотация. *Роботы-манипуляторы представляют собой сильно нелинейные, динамически связанные и изменяющиеся во времени системы, которые широко используются в промышленности. Неотъемлемой составной частью любого робота является система управления положением его рабочего инструмента. К такой системе предъявляются высокие требования по обеспечению точности работы робота как в статических, так и динамических режимах. Уравнение движения двухзвенного робота представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение. В данной статье представляется разработка математической модели управления динамическим движением двухзвенного робота-манипулятора с применением инновационного метода компенсации динамики объекта и возмущений. Математическое моделирование выполнено в три этапа. Первый этап заключается в составлении известных уравнений двухзвенного робота-манипулятора методом уравнений Лагранжа, второй этап – представление уравнений Лагранжа в пространстве состояний, третий этап – представление уравнений Лагранжа в пространстве состояний с параметрами, зависящими от состояния. Результаты выполненного математического моделирования являются основой для выполнения дальнейшего компьютерного моделирования системы управления двухзвенного робота манипулятора, являющегося нелинейным объектом управления.*

Ключевые слова: *Двухзвенный робот-манипулятор, математическая модель, пространство состояний*

Аңдатпа. *Робот-манипуляторлар – бұл өнеркәсіпте кеңінен қолданылатын жоғары бейсызықты, динамикалық байланысты және уақыт бойынша өзгеретін жүйелер. Кез-келген роботтың ажырамас бөлігі - оның жұмыс құралының орналасуын басқару жүйесі. Мұндай жүйеге статикалық және динамикалық режимдерде роботтың дәлдігін қамтамасыз ету үшін жоғары талаптар қойылады. Екі буынды роботтың қозғалыс теңдеуі бейсызықты дифференциалдық теңдеу болып табылады. Бұл мақалада объектінің динамикасы мен бұзылуларын өтеудің инновациялық әдісін қолдана отырып, екі буынды робот-манипулятордың динамикалық қозғалысын басқарудың математикалық моделін жасау ұсынылады.*

Математикалық модельдеу үш кезеңнен тұрады. Бірінші кезең – Лагранж теңдеулері әдісімен екі буынды робот-манипулятордың белгілі теңдеулерін құру, екінші кезең – күй кеңістігінде Лагранж теңдеулерін ұсыну, үшінші кезең – күйге тәуелді параметрлері бар күй кеңістігінде Лагранж теңдеулерін ұсыну. Математикалық модельдеудің нәтижелері бейсызықты басқару объектісі болып табылатын екі буынды робот-манипулятордың басқару жүйесін одан әрі компьютерлік модельдеуді жүзеге асыруға негіз болып табылады.

Түйін сөздер: *Екі буынды робот-манипулятор, математикалық моделі, күй кеңістігі*

Abstract. *Robot manipulators are highly nonlinear, dynamically coupled and time-varying systems that are widely used in industry. An integral part of any robot is a control system for the position of its working tool. Such a system has high requirements to ensure the accuracy of the robot's operation in both static and dynamic modes. The equation of motion of a two-link robot is a nonlinear differential equation. This article presents the development of a mathematical model for controlling the dynamic movement of a two-link robot manipulator using an innovative method for compensating the dynamics of an object and disturbances. Mathematical modeling is carried out in three stages. The first stage consists in compiling the known equations of a two-link robot manipulator by the Lagrange equations method, the second stage is the representation of Lagrange equations in the state space, the third stage is the representation of Lagrange equations in the state space with state-dependent parameters. The results of the performed mathematical modeling are the basis for further computer modeling of the control system of a two-link robot manipulator, which is a nonlinear control object.*

Keywords: *Two-link robot manipulator, mathematical model, state space.*

Кіріспе. Робот-манипулятор бір-бірімен байланысқан бірқатар қатты буындардан тұрады, әр буын өзінің басқарылатын жетегімен жабдықталған. Әдетте, айналмалы типтегі буындар қолданылады. Буындарда жетектердің орналасуы мен күйінің сезбектері бар. Осылайша, роботты басқарудың міндеті – робот құралы кеңістікте белгілі бір позицияны алатындай немесе берілген траектория бойынша кеңістік пен уақытта қозғалатындай етіп буын жетектерін басқару.

Роботтың әр буыны және оның құралы белгілі бір массаға ие және жетектердің мүмкіндіктері шектеулі, бұл роботты механикалық құрылғыны басқарудың динамикалық көп арналы объектісі ретінде қарастыруға мәжбүр етеді. Осы жағдайларда басқарудың қажетті сапасын қамтамасыз ету үшін басқару алгоритмі динамикалық қасиеттерді, сондай-ақ басқару арналарының өзара байланысын ескеруі керек. Осылайша, сапалы басқару үшін басқару арналары бойынша робот-манипулятордың математикалық моделі қажет. Модель сыртқы және ішкі күштер мен сәттерге байланысты буындардың қозғалысын жеткілікті дәлдікпен көрсетуі керек. Мұндай модельдерді құрастыру және роботтарды басқару алгоритмдерін әзірлеу мәселелері ғылыми мақалалардың едәуір санына арналған [1, 2]. Бұл жағдайда, әдетте, Лагранж немесе Ньютонның дәстүрлі аналитикалық әдістері қолданылады. Лагранж әдісі аналитикалық зерттеулер үшін ыңғайлы. Буындардың қозғалыс динамикасы жеткілікті дәлдікпен бейсызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесімен ұсынылуы мүмкін.

Роботтың математикалық моделінің бейсызықты және көп арналылығы оның басқару алгоритмін синтездеу мәселесін шешуді айтарлықтай қиындатады. Басқару теориясында бейсызықты объектілер үшін басқару жүйелерін синтездеудің әмбебап инженерлік әдістері әлі жоқ, тек олардың жеке кластары үшін шешімдер бар. Кең таралған әдіс жұмыс нүктесі аймағындағы объектіні сызықтандыру және жақсы дамыған сызықтық синтез әдістерін ([1-3] және т.б.) пайдалану болып табылады, дегенмен, мұндай сызықтандыру негізінде құрылған жүйелер номиналды режимнен басқарылатын айнымалылардағы өзгерістердің аз диапазонымен жұмыс істейді, елеулі өзгеріс кезінде жүйенің реттегішін қайта конфигурациялауға тура келеді, яғни адаптивті жүйелерді пайдалану керек. Мұндай жүйелер күрделі және кейбір жағдайларда өнімділіктің төмендеуімен сипатталуы мүмкін.

Басқа тәсіл – кері байланысты сызықтандыру [2, 3, 4] және негізінен аффиндік жүйелер үшін қолданылады. Әрі қарай сызықтық әдістер қайтадан қолданылады. Бұл әдістеме «жылдам» роботтарды басқару алгоритмдерін синтездеу үшін қолданылады, бұл ағылшын әдебиетінде «Computed Torque Control» (CTC) деп аталатын есептелген моментті басқару әдісі [5]. Мұндай сызықтандырудан кейін жаңа режимге автоматты түрде немесе қолмен реттеу қажет емес, бірақ CTC әдісімен алынған басқару алгоритмдерінің күрделілігін және олардағы тапсырма сигналдың екінші туындысын есептеу қажеттілігін атап өту керек. Сондай-ақ, бейсызықты объектіні күйге тәуелді (ағылшын. State Dependent Coefficient, SDC) параметрлері бар күй кеңістігінде сызықтық модель түрінде көрсетуден тұратын жалпы әдістеме бар [6, 8, 12-14]. Содан кейін Риккати теңдеуі құрастырылады және шешіледі, оның параметрлері де күйге байланысты (ағылшын. State-Dependent Riccati Equation, SDRE). SDRE әдісі Риккати теңдеулерін нақты уақыт режимінде шешу қажеттілігіне байланысты есептеудің айтарлықтай көлемді болғандықтан, ол практикада кеңінен қолданылмаған. Қарастырылған мүмкіндіктерге байланысты әрбір өндіруші, әдетте, оның «ноу-хау» болып табылатын роботтардың осы түріне бірегей, өзінің басқару алгоритмін әзірлейді.

Бұл жұмыста роботты басқару алгоритмін синтездеу үшін [13] мақалада ұсынылған объектінің динамикасын және бұзылуларды компенсациялау әдісін қолдану ұсынылады. Ол әдіс бірқатар артықшылықтарға ие, мысалы, бейсызықты көп арналы объектілер үшін қолданылуы, бастапқы деректерді орнатудың физикалық анықтығы, дәлдіктен берілген фильтр-эталонға дейінгі объектінің автоматты қозғалысын қамтамасыз ететін аналитикалық формада алгебралық әдістерді басқарудың көп арналы алгоритмін алу, реттеудің статикалық қатесінің болмауы. Әдіс тұрақты параметрлері бар сызықтық объектілер үшін [14, 15], сондай-ақ SDC формасында ұсынылған бейсызықты стационарлы емес объектілер класы үшін әзірленді [8]. Бұл әдіске сәйкес, осы реттегіш құрамына объектімен (оның алдында) қатар объектінің кері математикалық моделі қосылады. Компенсация басқару объектісінің сәйкес айнымалыларына қолданылатын сыртқы әсерлердің кері моделінің айнымалыларына қарама-қарсы таңбамен қолдану арқылы жүзеге асырылады. Бақылау үшін қол жетімді емес әсерлер сәйкес объект айнымалылары мен кері модельдің сәйкес келмеуі бойынша бағаланады. Осылайша, мұнда кері байланыс негіз етіп алынбайды, бірақ осы объектінің кері моделі арқылы бағаланған сыртқы әсерлерді өтеу туралы физикалық негізделген идея арқылы енгізіледі. Басқару құрылғысын іске асыру мүмкіндігі үшін кері модельдің сыртқы әсер ету тізбегінде статикалық режимде бірлік беру коэффициенті бар фильтр-эталондар енгізілген. Фильтр-эталондардың құрылымы мен параметрлері осы фильтрлер кері модельмен бірге басқарудың қажетті сапасын қамтамасыз ететін физикалық іске асырылатын басқару құрылғысымен ұсынылуы үшін таңдалады. Жай дифференциалдық теңдеулердің [14, 15] қалыпты жүйесімен ұсынылған сызықтық объектілерді басқару үшін идеяны зерттеуі осы тәсілдің тиімділігі мен артықшылықтарын көрсетті: бастапқы деректердің анықтығы, объект теңдеулері мен фильтр-эталондардың оң жақтарының алгебралық түрлендірулері арқылы аналитикалық түрде бір және көп арналы объектілерді басқару алгоритмдерін алу, нөлдік статикалық басқару қатесі, тапсырманы қайталау және бұзушылықтарды фильтр-эталондар дәлдікпен өтеу.

Бұрын аталған әдіс бір буынды робот-манипуляторды басқаруды сипаттау үшін сәтті қолданылды [8-11], екі буынды роботқа объектінің динамикасы мен бұзылуларын өтеу әдісі бірінші рет қолданылады. Әрине, басқару объектісінің сызықтық емес қасиеттерін есепке алу математикалық сипаттама мен басқару алгоритмін едәуір қиындатады, сондықтан біз айналмалы буындары бар екі буынды жазық манипулятордың динамикасын қарастырумен шектелдік. Осылайша, SDC түрінде айналмалы буындары бар екі буынды жалпақ манипулятордың математикалық моделін құру міндеті қойылады. Есеп үшке бөлінеді: Лагранж теңдеулерін құру, осы теңдеулерді күй кеңістігінде бейнелеу және теңдеулерді SDC түрінде алу.

Нәтижелер және талқылау.

Жалпы Лагранж теңдеулері (1):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau, \quad L = K - P, \tag{1}$$

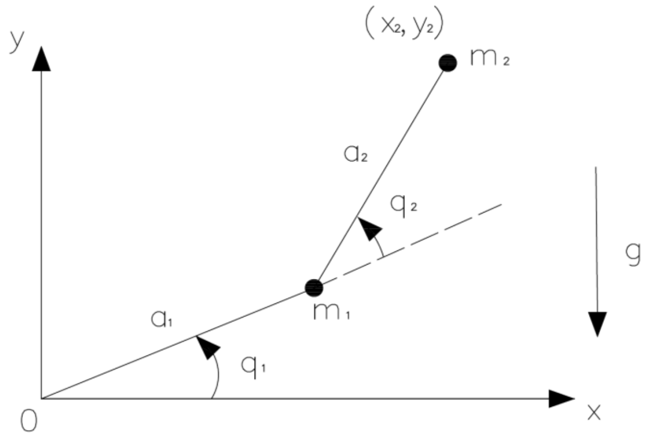
мұнда $q \in R^n$ – жалпыланған координаттар векторы, $K \in R^1$, $P \in R^1$ – манипулятордың кинетикалық және потенциалдық энергиясыра, $\tau \in R^n$ – манипулятор байланыстарындағы қозғаушы момент векторы, n – манипулятор буындарының саны, t – уақыт.

Бұл теңдеу кинетикалық және потенциалдық энергияларды есептегеннен кейін келесі түрде ұсынылуы мүмкін (2):

$$M(q)\ddot{q} + V_m(q,\dot{q})\dot{q} + F(\dot{q}) + G(q) + \tau_d = \tau, \tag{2}$$

мұнда $M(q)$ – инерция матрицасы, $V_m(q,\dot{q})$ – Кориолис матрицасы (ортаға тарткыштық), $F(\dot{q})$ – үйкеліс мүшелері, $G(q)$ – ықпалдастық векторы, τ_d – ауытқу векторы, τ – айналу сәті векторы (қозғаушы күштер). Әрі қарай үйкелісті елемейміз. Қарапайымдылық үшін жетектердің инерциясы ескерілмейді, буындардың кинетикалық энергиясының өсуі ретінде ескеруге болады.

1-суретте қарастырылып отырған манипулятордың схемасы көрсетілген.



1-сурет. Айналмалы сілтемелері бар екі буынды жалпақ манипулятор схемасы

(2) теңдеуді матрицалық өрнек ретінде жазуға болады (3) [13]

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}(m_1+m_2)a_1^2 + m_2a_2^2 + 2m_2a_1a_2\cos q_2 & m_2a_2^2 + m_2a_1a_2\cos q_2 \\ m_2a_2^2 + m_2a_1a_2\cos q_2 & m_2a_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2\end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix}0 & -m_2a_1a_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\sin q_2 \\ m_2a_1a_2\dot{q}_1\sin q_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_1 \\ \dot{q}_2\end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix}(m_1+m_2)ga_1\cos q_1 + m_2ga_2\cos(q_1+q_2) \\ m_2ga_2\cos(q_1+q_2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tau_1 \\ \tau_2\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{3}$$

(3) теңдеуіндегі тұрақты шамаларды (4) түрінде белгілеңіз:

$$\alpha = (m_1 + m_2)a_1^2, \beta = m_2 a_2^2,$$
$$\eta = m_2 a_1 a_2, \gamma = g/a_1. \quad (4)$$

Содан кейін (3) теңдеу (5) теңдеу ретінде жазылады:

$$\begin{bmatrix} \alpha+\beta+2\eta cos q_2 & \beta+\eta cos q_2 \\ \beta+\eta cos q_2 & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\eta(2\dot{q}_1+\dot{q}_2)sin\,q_2 \\ \eta\dot{q}_1 sin\,q_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} +$$
$$+\begin{bmatrix} \alpha\gamma cos q_1 + \eta\gamma cos(q_1+q_2) \\ \eta\gamma cos(q_1+q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

(2) және (5) теңдеулеріне сәйкес бізде (6) өрнек бар:

$$M(q) = \begin{bmatrix} \alpha+\beta+2\eta cos q_2 & \beta+\eta cos q_2 \\ \beta+\eta cos q_2 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}(q) & m_{12}(q) \\ m_{21}(q) & \beta \end{bmatrix},$$
$$V(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -\eta(2\dot{q}_1+\dot{q}_2)sin\,q_2 \\ \eta\dot{q}_1 sin\,q_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v_{12}(q,\dot{q}) \\ v_{21}(q,\dot{q})_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$
$$G(q) = \begin{bmatrix} \alpha\gamma cos q_1 + \eta\gamma cos(q_1+q_2) \\ \eta\gamma cos(q_1+q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix}.$$

(6) және одан төмен өрнекте индекстері жоқ айнымалылар әдетте векторлар болып табылады. (6) өрнектегі $M(q)$ инерция матрицасының ерекшелігі мынада: 2-ші буынның меншікті инерциясын анықтайтын соңғы диагональ элементі β тұрақты сан, ал қалған барлық элементтер тек 2-ші буынның айналу бұрышына тәуелді.

Күй кеңістігіндегі Лагранж теңдеулерін ұсыну.

Әдетте басқару алгоритмін синтездеу үшін (6) теңдеу жұмыс нүктесі аймағында сызықтандырылған болады, содан кейін күй кеңістігінде ұсынылады. Біздің алдымызда күрделі міндет тұр: (6) теңдеуді күй кеңістігінде сызықтанадыруды қолданбай ұсыну керек. Ол үшін (2) теңдеуді, содан кейін (6) теңдеуді $\ddot{q}$ -ға қатысты шешу керек. (2) теңдеуден (7) өрнегі бар

$$\ddot{q} = -M^{-1}(q)V(q,\dot{q})\dot{q} - M^{-1}(q)G(q) + M^{-1}(q)\tau \quad (7)$$

$M^{-1}(q)$ инерциясының кері матрицасын анықтаймыз, ол үшін $M(q)M^{-1}(q)=1$ жазамыз және (8) өрнек аламыз:

$$\begin{bmatrix} \alpha+\beta+2\eta cos q_2 & \beta+\eta cos q_2 \\ \beta+\eta cos q_2 & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_3 & \Phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

(8) өрнектен М-1 матрицасының қажетті элементтерінің Фі мәндерін (9) өрнек түрінде табамыз

$$\Phi_1 = \frac{1}{(\alpha+\beta+2\eta\, cosq_2) - \frac{(\beta+\eta\, cosq_2)^2}{\beta}},$$
$$\Phi_2 = 0,$$
$$\Phi_3 = -\frac{1}{\beta}\frac{(\beta+\eta\, cosq_2)}{(\alpha+\beta+2\eta\, cosq_2) - \frac{(\beta+\eta\, cosq_2)^2}{\beta}}, \tag{9}$$
$$\Phi_4 = \frac{1}{\beta}$$

Бірінші матрицаның бірінші бағанының өрнектерін сәйкесінше екінші матрицаның бірінші бағанының мәндерімен ауыстыру арқылы қосымша есептеулерге ыңғайлы болу үшін жаңа белгілерді енгізе отырып, $M^{-1}(q)$ матрицалық түрде жазуға болады (10),

$$M^{-1}(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\alpha+\beta+2\eta\, cosq_2) - \frac{(\beta+\eta\, cosq_2)^2}{\beta}} & 0 \\ -\frac{1}{\beta}\frac{(\beta+\eta\, cosq_2)}{(\alpha+\beta+2\eta\, cosq_2) - \frac{(\beta+\eta\, cosq_2)^2}{\beta}} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}^{-1}(q) & 0 \\ m_{12}^{-1}(q) & 1/\beta \end{bmatrix} \tag{10}$$

(10) және (6) белгілерін ескере отырып, (7) өрнектегі элементтерді анықтаймыз

$$\begin{gathered} M^{-1}(q)V(q,\dot q) = \begin{bmatrix} m_{11}^{-1}(q) & 0 \\ m_{12}^{-1}(q) & 1/\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & v_{12}(q,\dot q) \\ v_{21}(q,\dot q)_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & m_{11}^{-1}(q)v_{12}(q,\dot q) \\ v_{21}(q,\dot q)_2/\beta & m_{12}^{-1}(q)v_{12}(q,\dot q) \end{bmatrix}, \\ M^{-1}(q)G(q) = \begin{bmatrix} m_{11}^{-1}(q) & 0 \\ m_{12}^{-1}(q) & 1/\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}^{-1}(q)g_1(q) \\ m_{12}^{-1}(q)g_1(q) + g_2(q)/\beta \end{bmatrix}, \\ M^{-1}(q)\tau = \begin{bmatrix} m_{11}^{-1}(q) & 0 \\ m_{12}^{-1}(q) & 1/\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}^{-1}(q)\tau_1 \\ m_{12}^{-1}(q)\tau_1 + \tau_2/\beta \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{11}$$

Содан кейін (7) өрнек түрінде жазылады (12)

$$\begin{bmatrix} \ddot q_1 \\ \ddot q_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & m_{11}^{-1}(q)v_{12}(q,\dot q) \\ v_{21}(q,\dot q)_2/\beta & m_{12}^{-1}(q)v_{12}(q,\dot q) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot q_1 \\ \dot q_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_{11}^{-1}(q)g_1(q) \\ m_{12}^{-1}(q)g_1(q) + g_2(q)/\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{11}^{-1}(q) & 0 \\ m_{12}^{-1}(q) & 1/\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} x_{01} &= \dot q_1, \\ x_{02} &= q_1, \\ x_{03} &= \dot q_2, \\ x_{04} &= q_2, \end{aligned} \quad \text{яғни} \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \\ x_{04} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot q_1 \\ q_1 \\ \dot q_2 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad \text{белгілейміз} \tag{13}$$

(13) өрнек пен енгізілген белгілерді ескере отырып, (12) өрнек (14) күй теңдеуі түрінде жазылады

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{01}\\ \dot{x}_{02}\\ \dot{x}_{03}\\ \dot{x}_{04}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0 & 0 & m_{11}^{-1}(x_0)v_{12}(x_0) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ v_{21}(x_0)_2/\beta & 0 & m_{12}^{-1}(x_0)v_{12}(x_0) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{01}\\ x_{02}\\ x_{03}\\ x_{04}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}m_{11}^{-1}(x_0)g_1(x_0)\\ x_{01}\\ m_{12}^{-1}(x_0)g_1(x_0)+g_2(x_0)/\beta\\ x_{03}\end{bmatrix}+ \tag{14}$$

$$+\begin{bmatrix}m_{11}^{-1}(x_0) & 0\\ 0 & 0\\ m_{12}^{-1}(x_0) & 1/\beta\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}.$$

Шығыс теңдеуі (15)түрінде жазылады

$$\begin{bmatrix}y_{01}\\ y_{02}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{01}\\ x_{02}\\ x_{03}\\ x_{04}\end{bmatrix}. \tag{15}$$

Лагранж теңдеулерін SDC түрінде ұсыну

Жалпы алғанда, векторлық-матрицалық формада аддитивті бұзылулар болмаған кезде SDC формасындағы теңдеулер (16) түрінде жазуға болады:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_0\\ y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A(x_0,u) & B(x_0,u)\\ C(x_0,u) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ u\end{bmatrix}. \tag{16}$$

Көріп отырғанымыздай (14), (15) формуланы (16) түріндегі ұсыну үшін (14) оң жағындағы екінші мүшесі келесі өрнек (17) түрінде жазылуы керек:

$$-\begin{bmatrix}m_{11}^{-1}(x_0)g_1(x_0)\\ x_{01}\\ m_{12}^{-1}(x_0)g_1(x_0)+g_2(x_0)/\beta\\ x_{03}\end{bmatrix}=$$

$$=-\begin{bmatrix}0 & m_{11}^{-1}(x_0)g_1(x_0)/x_{02} & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \left(m_{12}^{-1}(x_0)g_1(x_0)+g_2(x_0)/\beta\right)/x_{04}\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{01}\\ x_{02}\\ x_{03}\\ x_{04}\end{bmatrix} \tag{17}$$

Лагранж теңдеулерін SDC түрінде (18) теңдеу ретінде ұсынамыз:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{01} \\ \dot{x}_{02} \\ \dot{x}_{03} \\ \dot{x}_{04} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & m_{11}^{-1}(x_0)g_1(x_0)/x_{02} & m_{11}^{-1}(x_0)v_{12}(x_0) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_{21}(x_0)_2/\beta & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \\ x_{04} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} m_{11}^{-1}(x_0) & 0 \\ 0 & 0 \\ m_{12}^{-1}(x_0) & 1/\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

мұнда $a_{34} = m_{12}^{-1}(x_0)v_{12}(x_0) + \left(m_{12}^{-1}(x_0)g_1(x_0) + g_2(x_0)/\beta\right)/x_{04}$.

Осы әдіспен әзірленген SDC түріндегі екі буынды робот манипулятордың математикалық моделін бейсызықты басқару объектісі ретінде екі буынды робот манипуляторын басқару жүйесін синтездеу үшін қосымша зерттеуде пайдалануға болады. Осылайша, айналмалы буындары бар екі буынды жалпақ манипуляторды басқаруға арналған компьютерлік модельді дамытудың келесі кезеңі – масса, манипулятор буындарының ұзындығы және т.б. арқылы көрсетілген басқару теңдеулерінің коэффициенттерінің белгілі мәндерін есепке алу. Бұрыштар айнымалы және ағымдағы мәндер болып табылады.

Қорытынды. Бұл зерттеуде көрсетілгендей, робот манипулятордың математикалық моделінің бейсызықты және көп каналды сипатына байланысты оның басқару алгоритмін синтездеу мәселесін шешу тривиальды емес міндет болып табылады. Бұл мақалада авторлар айналмалы буындары бар екі буынды жазықтық манипулятордың динамикасын қарастырумен шектелді және оның математикалық моделін SDC түрінде әзірледі. үш ішкі тапсырманы шешу арқылы: Лагранж теңдеулерін жазу, осы теңдеулерді күй кеңістігінде көрсету және теңдеулерді SDC түрінде шығару. Зерттеудің келесі бағыты алынған модель негізінде айналмалы буындары бар екі буынды жалпақ манипуляторды басқарудың компьютерлік модельдеуін қамтиды.

Алғыс. Бұл зерттеу Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігі ғылым комитетінің AP19679327 «Мобильді роботтарды автоматты басқару және инерциялық навигация есептеріндегі машиналық оқыту әдістері» грант шеңберінде қаржыландырылады.

References

1. W. Khalil. Modeling and Control of Manipulators - Part II: Dynamics and Control. Doctoral. GdR Robotics Winter School: Robotica Principia, Centre de recherche Inria Sophia Antipolis – Méditérranée, 2019.
2. H. Ph. H. Anh, N. T. Dat. Adaptive neural fault- tolerant optimal control for nonlinear uncertain systems with dynamic state constraints. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2023.
3. J-G. Zhao. Adaptive Dynamic Programming-based Adaptive Optimal Tracking Control of a Class of Strict-feedback Nonlinear System. International Journal of Control Automation and Systems, 2023
4. A. Hannane, M. M. Bakti, B. Bououlid Idrissi, Nonlinear Rigid-Flexible Manipulator Adaptive Model Predictive Control. In book: Advances in Integrated Design and Production II, 2023
5. A. Aouaichia, K. Kara, K. Kara, A. Ghoul, A. Ghoul. An optimized fuzzy computed torque control for the robot manipulator PUMA 560. Conference: IEEE International Conference on Advances in Electronics, Control and Communication Systems (ICAECCS2023): Blida 1 University, Blida, Algeria, 2023. DOI 10.1109/ICAECCS56710.2023.10104647
6. A.G. Romero, L.S. Gadelha de Souza. Statistical Investigation about the SDRE Optimality for Satellites with Nonlinearities. International Journal of Applied Mathematics Computational Science and Systems Engineering, 2023
7. F. Assadian, K. Mallon. Introduction to Multivariable Feedback Control. In book: Robust Control, 2022.
8. Shadrin G.K. Synthesis of a control algorithm for nonlinear plant using correction of controlled plant dynamics and compensation of perturbations // Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravleniethis link is

disabled, 2020, 21(12), pp. 667–674.
9. Shadrin, G.K., Alontseva, D.L., Kussaiyn-Murat, A.T, Kadyroldina A.T., Ospanov, O.B., Haidegger, T. Application of compensation algorithms to control the movement of a robot manipulator// Acta Polytechnica Hungarica, 2020, 17(1), pp. 191–214
10. Shadrin, G.K., Alontseva, D.L., Kussaiyn-Murat, A.T., Krasavin, A.L Synthesis of the robotic tool motion-controlling algorithm using method of correction dynamics and pertubations compensation, 2019, pp. 472-480.
11. Rui-Dong Xi, Tie-Nan Ma, Xiao Xiao, Zhi-Xin Yang. Design and implementation of an adaptive neural network observer–based backstepping sliding mode controller for robot manipulators. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2023.

Additional literature

12. Friedland B. Quasi Optimal Control and the SDRE Method. Proc // 17'IFAC Sympos. Automat. Control Aerospace. Toulouse, France, 2007.
13. Shamma J.S. and Cloutier J.R. Existence of SDRE Stabilizing Feedback // IEEE Transactions on Automatic Control, 2003/ No 48(3).
14. SHadrin G.K. Fizicheskij podhod k postroeniyu sistem upravleniya na osnove kompensacii dinamiki ob"ekta i vozmushchenij // AiT. 2016. – № 7. – S. 33-46.
15. SHadrin G.K., Porubov D.A., SHadrin M.G. Sintez algoritma upravleniya dvizheniem dvuhkolesnogo robota metodom kompensacii dinamiki ob"ekta i vozmushchenij // Avtomatika i programmnaya inzheneriya. – 2017. № 4(22). – S. 10 – 15.